2. OPTICKÉ VLNOVODY

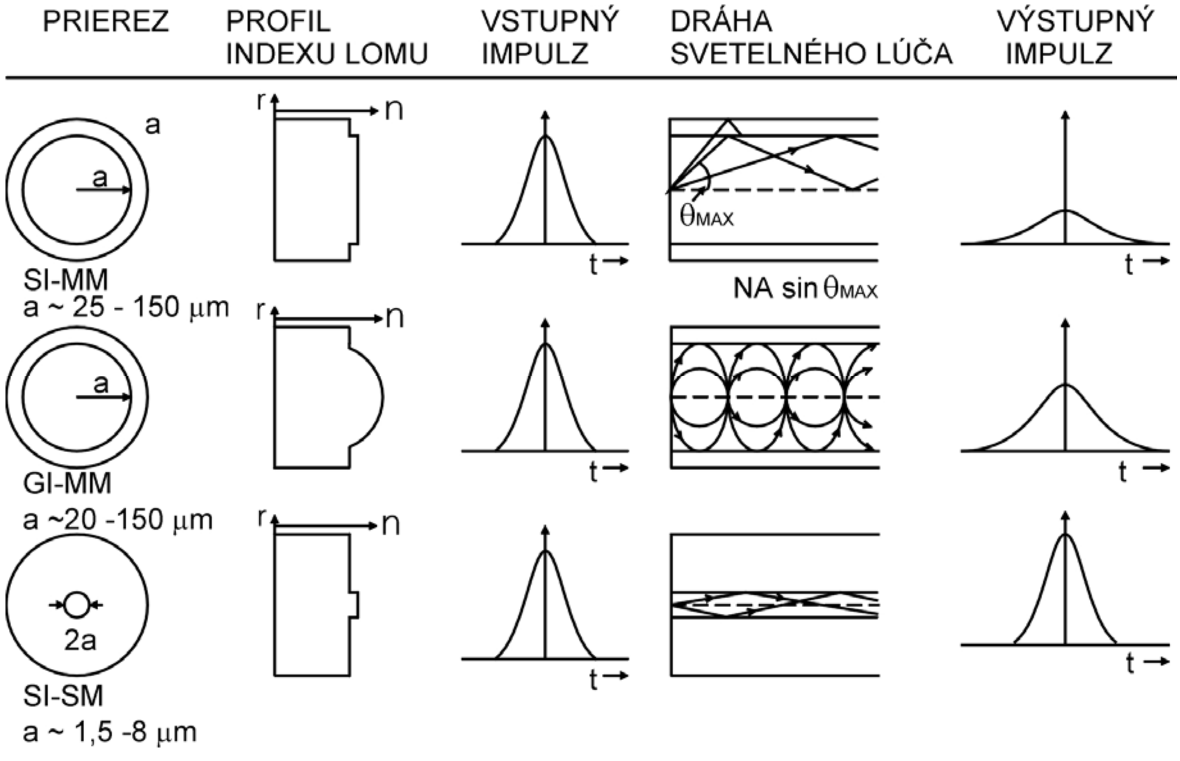
2.1 ROZDELENIE A ZÁKLADNÉ TYPY OPTICKÝCH VLNOVODOV

Optický vlnovod (dielektrický svetlovod)

1950 – priemyslová výroba optických vlákien

1. Telekomunikačné vlákna pre veľké vzdialenosti.
2. Telekomunikačné vlákna pre stredné vzdialenosti a miestny styk a lokálne komunikácie.
3. Vlákna pre osvetľovanie, kontrolné, diagnostické a meracie systémy.
4. Vlákna pre špeciálne systémy (vojenské, pozorovacie, prenos obrazu a pod.).
5. Vlákna na prenos energie (pre lekárske účely – špeciálny skalpel, obrábanie a pod.).
6. Vlákna pre senzorové systémy.

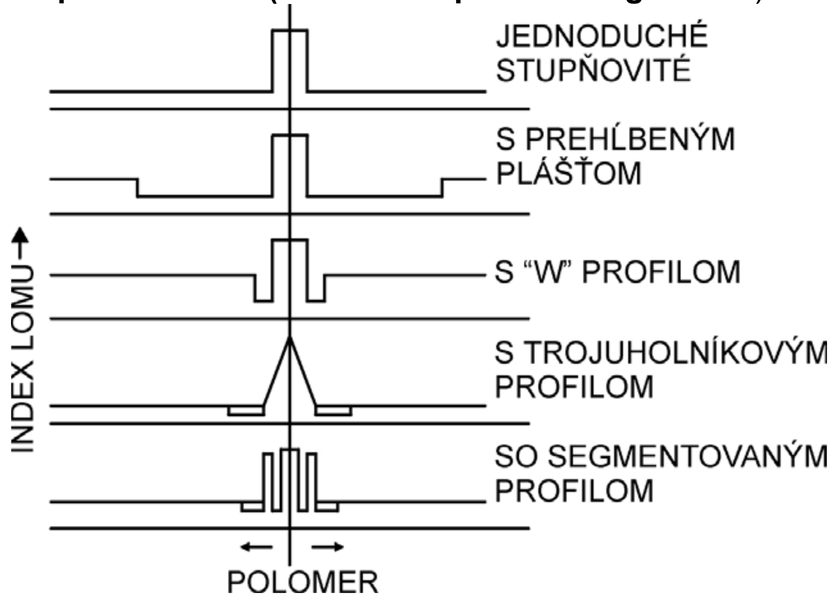
Pre **telekomunikačné účely** (**obr.2.1, obr. 2.2**) :



Obr. 2.1 Najčastejšie používané telekomunikačné optické vlákna.

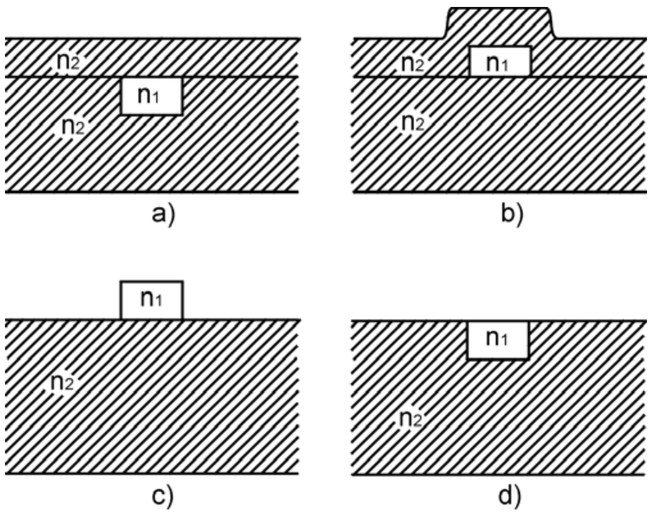
a) **mnohovidové vlákna** so skokovitým (stupňovitým) profilom indexu lomu, tzv. **stupňovité optické vlákna (SI-MM - Step Index MultiMode**),
b) **mnohovidové vlákna** so spojitým (gradientným) profilom indexu lomu, tzv. **gradientné optické vlákna** (**GI-MM - Graded Index MultiMode**),

c) **jednovidové vlákna** so skokovitým (stupňovitým) profilom indexu lomu, tzv**. stupňovité optické vlákna (SI-SM** - **Step Index SingleMode**).



Obr. 2.2 Profily indexu lomu jednovidových optických vlákien.

Planárne optické vlnovody – integrovaná optika.



Obr. 2.3 Priečny rez niektorých planárnych optických vlnovodov.

2.2 ZÁKLADNÉ POJMY VLNOVEJ A LÚČOVEJ TEÓRIE ŠÍRENIA SVETLA

2.2.1 VLNOVÁ ROVNICA

Maxwellove rovnice

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2.2.1)$$

$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2.2.2)$$

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad (2.2.3)$$

$$div\,\vec{E} = 0 \qquad (2.2.4)$$

zviazané **materiálovými vzťahmi**

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \qquad (2.2.5)$$

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H} \qquad (2.2.6)$$

Pre harmonickú časovú závislosť – **Helmholtzove vlnové rovnice**

$$\Delta\,\vec{E} + k^2\,\vec{E} = 0 \qquad (2.2.7)$$

$$\Delta\,\vec{H} + k^2\,\vec{H} = 0 \qquad (2.2.8)$$

kde

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad (2.2.9)$$

je **vlnové číslo**.
Zložky $\vec{E}$ a $\vec{H}$ – riešením **vlnovej rovnice**

$$\Delta\psi + k^2\,\psi = 0 \qquad (2.2.10)$$

Laplaceov operátor v kartézskej súradnicovej sústave

$$\Delta\psi(x,y,z) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad (2.2.11)$$

Laplaceov operátor vo valcovej súradnicovej sústave

$$\Delta\psi(r,\varphi,z) = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad (2.2.12)$$

2.2.2 ŠÍRENIE VÝKONU

Výkon P – integrácia **Poyntingovho vektora**

$$P = \int_A \mathrm{Re}\left\{\vec{S}\right\} d\vec{A} \tag{2.2.13}$$

kde

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\vec{E}, \vec{H}^*\right] \tag{2.2.14}$$

je **komplexný Poyntingov vektor**.

2.2.3 ROVNICA EIKONALU

- <u>**geometrická optika**</u>
- <u>**vlnová teória šírenia svetla**</u>

Rovnica eikonalu

$$\left(grad\,\phi\right)^2 = \left(\nabla\phi\right)^2 = c^2\varepsilon\mu = n^2 \tag{2.2.15}$$

V kartézskej súradnicovej sústave

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = n^2\left(x, y, z\right) \tag{2.2.16}$$

Povrch eikonalu

$$\phi\left(\vec{r}\right) = kon\check{s}t. \tag{2.2.17}$$

2.2.4 ROVNICE LÚČA

$$n\left(x, y, z\right)\frac{d\vec{r}}{ds} = grad\,\phi \tag{2.2.18}$$

po úprave

$$\frac{d}{ds}\left[n(x,y,z)\vec{s}_0\right] = grad\, n \tag{2.2.19}$$

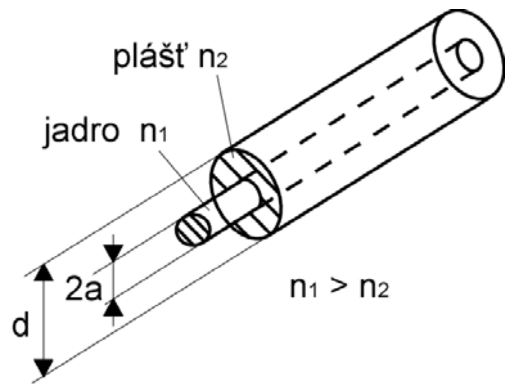
alebo

$$\frac{d}{ds}\left[n(x,y,z)\frac{d\vec{r}}{ds}\right] = grad\, n \tag{2.2.20}$$

Základné rovnice na určenie dráhy lúča v nehomogénnom prostredí.

2.3 LÚČOVÁ TEÓRIA ŠÍRENIA SVETLA V STUPŇOVITOM OPTICKOM VLÁKNE

Vlákno tvorené jadrom a plášťom (**obr. 2.4**)



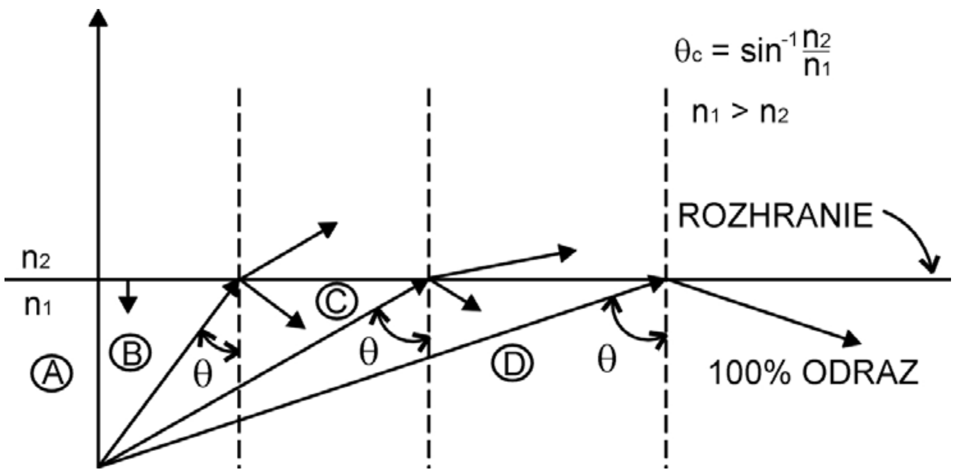
Obr. 2.4 Stupňovité mnohovidové optické vlákno.

Vidy – rôzne dráhy šírenia sa svetelnej vlny

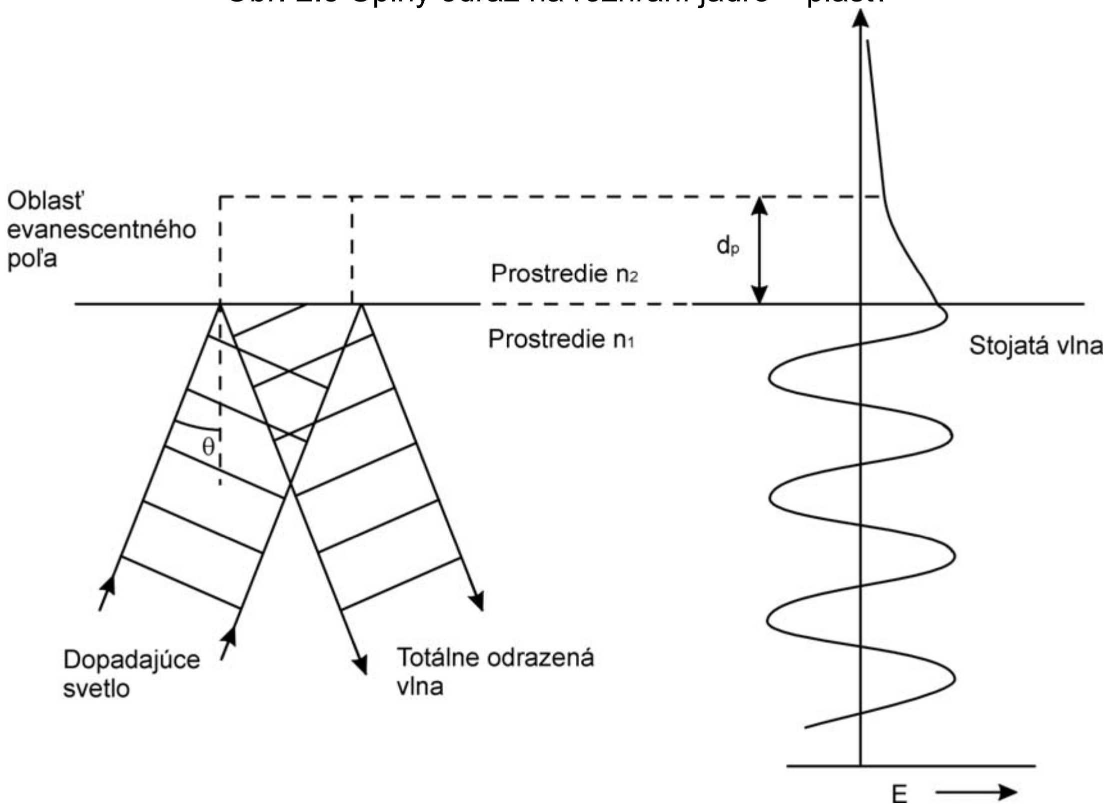
2.3.1 KLASIFIKÁCIA LÚČOV

SI-MM vlákno s indexom lomu jadra n_1 a indexom lomu plášťa n_2 pričom $\mathbf{n_2 < n_1}$ (n_1 = 1,48 a n_2 =1,46 $\Rightarrow$ θ_c = 80,6°) **obr. 2.5**

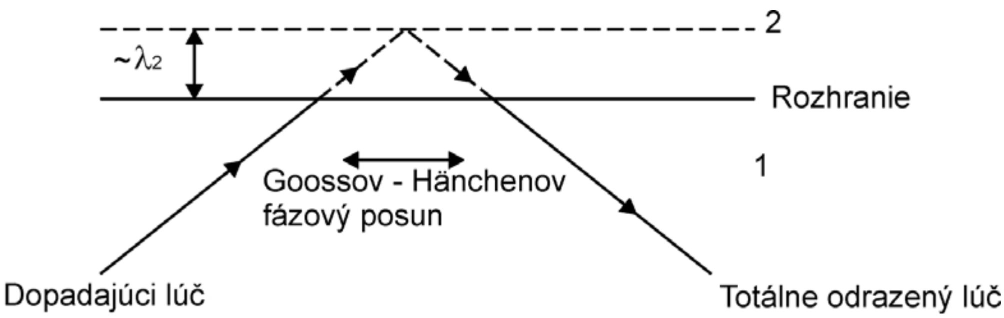
Totálny odraz – **evanescentná vlna** (**obr. 2.6**).



Obr. 2.5 Úplný odraz na rozhraní jadro – plášť.



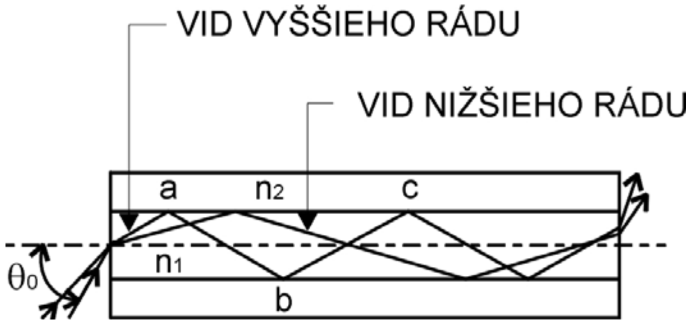
Obr. 2.6 Vznik evanescentnej vlny pri totálnom odraze.



Obr.2.7 Goosov – Hänchenov fázový posun pri totálnom odraze.

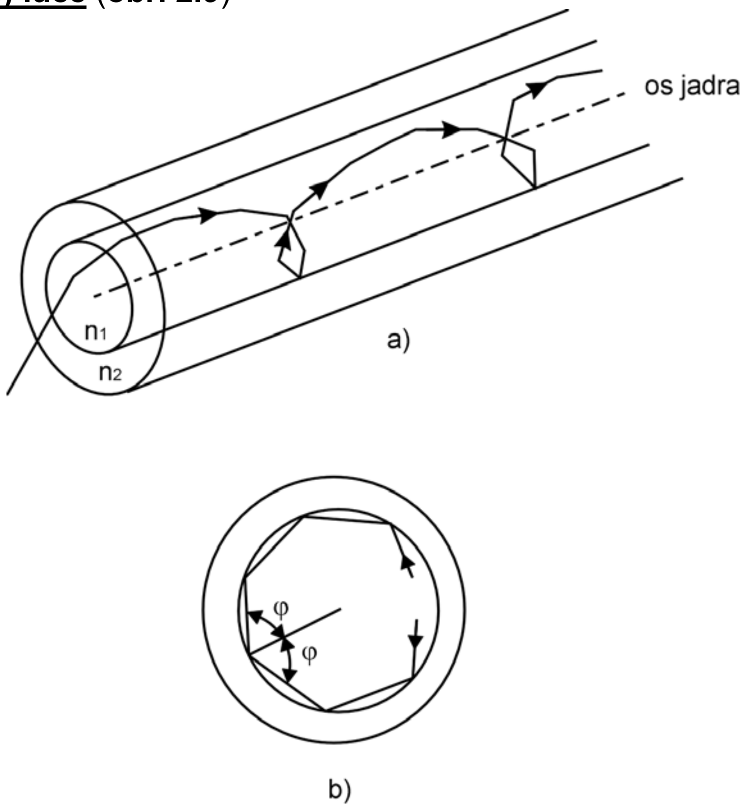
Lúče v (SI-MM OV) :

1. **<u>Meridionálne lúče</u>** (**obr. 2.8**)



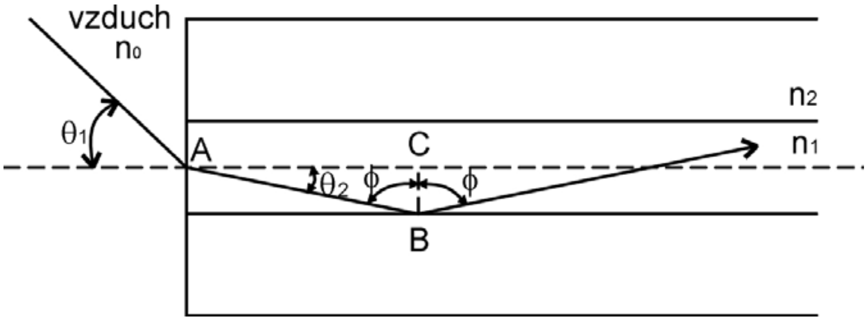
Obr. 2.8 Šírenie meridionálnych lúčov.

2. **<u>Šikmé (kosé) lúče</u>** (**obr. 2.9**)



Obr.2.9 Špirálová dráha šikmých lúčov v SIMM vlákne (a) a jej priečna projekcia (b).

2.3.2 ANALÝZA MERIDIONÁLNYCH LÚČOV



Obr. 2.10 Dráha meridionálneho lúča.

Snellov zákon (**obr. 2.10**)

$$n_0 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_2 \tag{2.3.1}$$

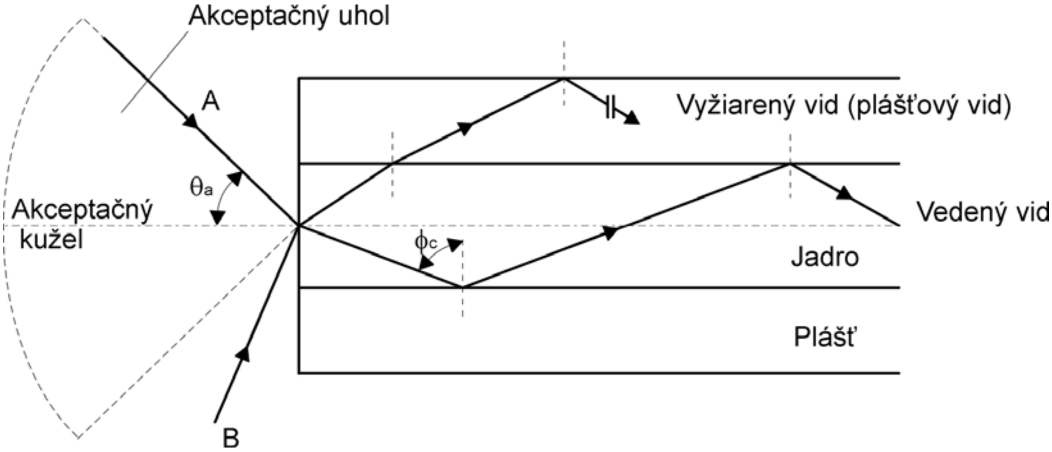
$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_2 \tag{2.3.2}$$

$$n_0 \sin\theta_1 = n_1 \cos\phi = n_1 \sqrt{1 - \sin^2\theta} \tag{2.3.3}$$

$\theta_1 = \theta_a$ – **akceptačný uhol optického vlákna**

$$n_0 \sin\theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{2.3.4}$$

Akceptačný kužel optického vlákna (**obr. 2.11**)



Obr. 2.11 Akceptačný kužel optického vlákna.

- **Vedené vidy**
- **Plášťové vidy**

2.3.3 NUMERICKÁ APERTÚRA

$$NA = n_0 \sin\theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{2.3.5}$$

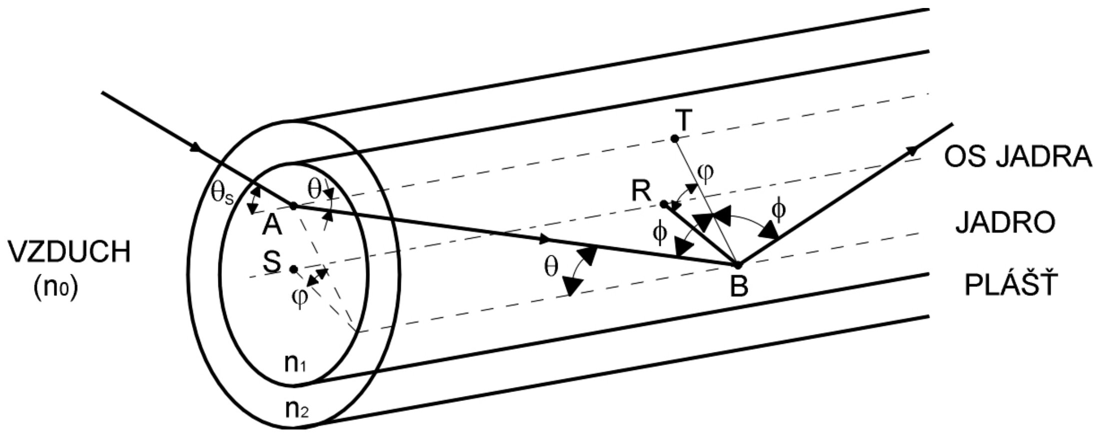
Relatívny rozdiel indexu lomu jadra a plášťa Δ

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad \text{pre} \quad \Delta \ll 1 \tag{2.3.6}$$

potom

$$NA \cong n_1 \sqrt{2\Delta} \tag{2.3.7}$$

2.3.4 ANALÝZA ŠIKMÝCH LÚČOV



Obr. 2.12 Dráha šikmého lúča dopadajúceho pod uhlom θ_s.

- **<u>Šikmé (kosé) vidy</u> (obr. 2.12)**

$$\sin\theta_{as} = \frac{n_1}{n_0}\frac{\cos\theta_c}{\cos\varphi} = \frac{n_1}{n_0 \cos\varphi}\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \tag{2.3.8}$$

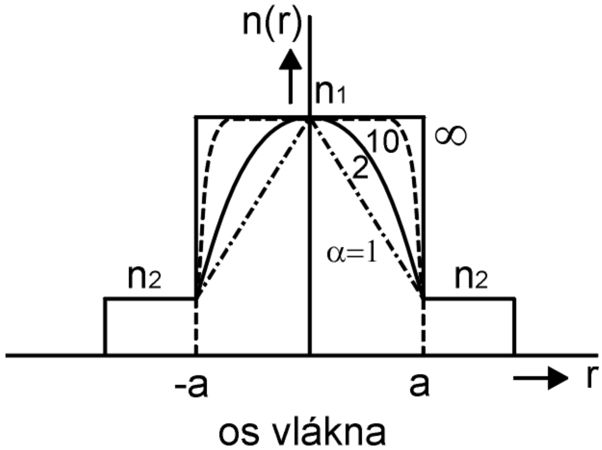
θ_{as} – akceptačný uhol pre šikmé lúče. Pomocou NA

$$n_0 \sin\theta_{as} \cos\varphi = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = NA \tag{2.3.9}$$

2.4 LÚČOVÁ TEÓRIA ŠÍRENIA SVETLA V OPTICKOM VLÁKNE SO SPOJITOU ZMENOU INDEXU LOMU

2.4.1 KLASIFIKÁCIA LÚČOV A ZÁKLADNÉ ROVNICE

OV s gradientným profilom indexu lomu (GI)

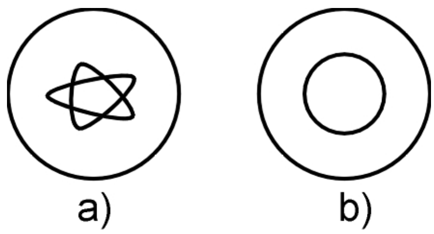


Obr. 2.13 Profil indexu lomu tzv. gradientného OV.

- Priebeh indexu lomu (**obr. 2.13**)

$$n(r) = \begin{cases} n_1 \sqrt{1 - 2\Delta\left(\dfrac{r}{a}\right)^{\alpha}} & pre\ r < a\ \ (jadro) \\ n_1 \sqrt{1 - 2\Delta} & pre\ r > a\ \ (plášť) \end{cases} \tag{2.4.1}$$

α – <u>parameter profilu</u>



Obr. 2.14 Šírenie šikmých lúčov v OV so spojitým profilom indexu lomu
(a) lúče s deformovanou dráhou; (b) špirálové lúče.

- **<u>Špirálové lúče</u>** (**obr. 2.14**)

Analýza – z rovnice lúča (2.3.42)

$$\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dr}{ds}\right) - nr\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{dn}{dr} \tag{2.4.2}$$

pre zložku r

$$n\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right) + \frac{d}{ds}\left(nr\,\frac{d\theta}{ds}\right) = 0 \tag{2.4.3}$$

pre zložku θ

$$\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dz}{ds}\right) = 0 \tag{2.4.4}$$

pre zložku z

Možno integrovať rovnicu (2.4.2), z čoho dostaneme

$$z = \int_{r_0}^{r} N_0\left[\left(\frac{n(r)}{n_0}\right)^2 + \left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)\left(x_0M_0 - y_0L_0\right) - N_0^2\right]^{-1/2} dr \tag{2.4.5}$$

2.4.2 MERIDIONÁLNE LÚČE

$$y_0 = M_0 = 0 \text{ a } x_0 = r_0$$

po integrácii (2.4.9) dostaneme

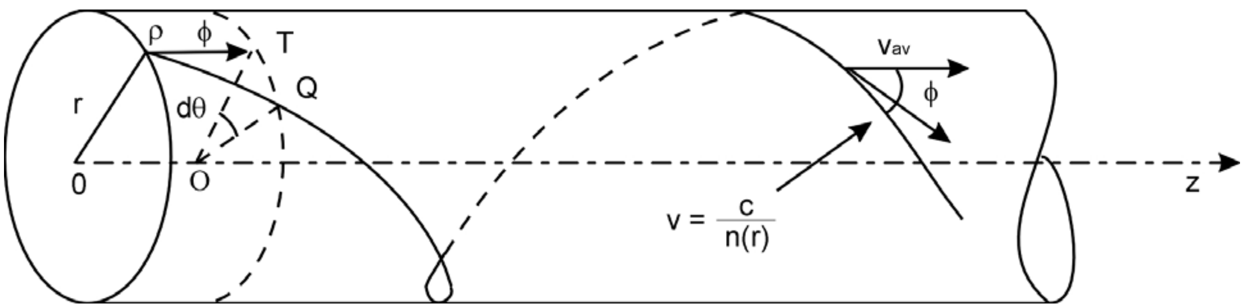
$$r = C\sin\left(\frac{\eta n_1}{n_0N_0} + \psi\right) \tag{2.4.6}$$

Rovnica (2.4.12) vyjadruje dráhu lúča tvaru vlny s periódou Λ.

Λ je konštantné pre určitý profil indexu lomu

$$n^2(r) = n_1^2\left[1-(\xi r)^2 + \frac{2}{3}(\xi r)^4 + \dots\right] = n_1^2 \sec h^2(\xi r) \tag{2.4.7}$$

2.4.3 ŠPIRÁLOVÉ LÚČE



Obr. 2.15 Dráha špirálového lúča.

Axiálna rýchlosť v_z (**obr. 2.15**)

$$v_z(r) = \frac{\cos\phi}{n(r)\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{r}{n}\frac{dn}{dr}}}{n\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{2.4.8}$$

Rýchlosť má byť pozdĺž dráhy lúča konštantná

$$n^2(r) = \frac{n_1^2}{1+(\eta r)^2} = n_1^2\left[1-(\eta r)^2 + (\eta r)^4 - \dots\right] \tag{2.4.9}$$

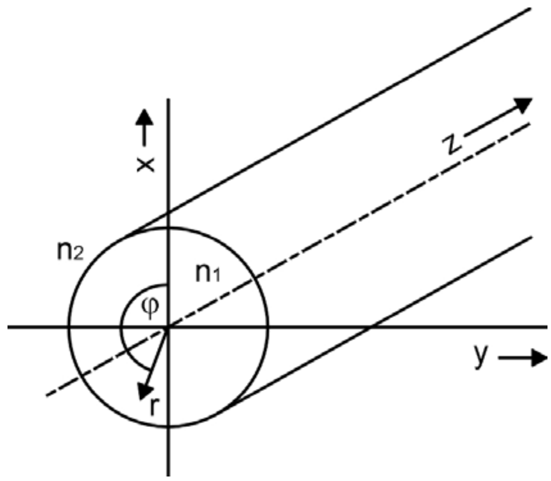
- Kvadratický profil indexu lomu

2.5 <u>VLNOVÁ TEÓRIA ŠÍRENIA SVETLA V OPTICKOM VLÁKNE SO SKOKOVOU ZMENOU INDEXU LOMU</u>

- **Riešenie Maxwellových rovníc**
- **<u>Meridionálne vidy</u>** – TE_{ml} a TM_{ml} vidy
- **<u>Hybridné vidy</u>** – HE_{ml} alebo EH_{ml}
- $\Delta << 1$ (v praxi $\Delta < 0.03$) – **<u>kvázihomogénne vidy</u>**
- **<u>Lineárne polarizované (LP) vidy</u>**

2.5.1 RIEŠENIE VLNOVEJ ROVNICE

$$n(r) = \begin{cases} n_1 & pre\ r \le a \ \ (jadro\ OV) \\ n_2 & pre\ r > a \ \ (plášť\ OV) \end{cases} \tag{2.5.1}$$



Obr. 2.16 Optické vlákno ako homogénny valcový dielektrický svetlovod.

Intenzita elektrického a magnetického poľa

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left\{ \vec{E}_0(r,\varphi)\ \exp[\ j(\omega t - \beta z)] \right\} \tag{2.5.2}$$

$$\vec{H} = \mathrm{Re}\left\{ \vec{H}_0(r,\varphi)\ \exp[\ j(\omega t - \beta z)] \right\} \tag{2.5.3}$$

Zložky fázorov

$$E_{0r} = -\frac{j}{\Gamma^2}\left(\beta \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_{0z}}{\partial \varphi} \right) \tag{2.5.4}$$

$$E_{0\varphi} = -\frac{j}{\Gamma^2}\left(\beta \frac{1}{r}\frac{\partial E_{0z}}{\partial \varphi} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} \right) \tag{2.5.5}$$

$$H_{0r} = -\frac{j}{\Gamma^2}\left(\beta \frac{\partial H_{0z}}{\partial r} - \omega \varepsilon \frac{1}{r}\frac{\partial E_{0z}}{\partial \varphi} \right) \tag{2.5.6}$$

$$H_{0\varphi} = -\frac{j}{\Gamma^2}\left(\beta \frac{1}{r}\frac{\partial H_{0z}}{\partial \varphi} + \omega \varepsilon \frac{\partial E_{0z}}{\partial r} \right) \tag{2.5.7}$$

E_{0z} a H_{0z} – riešením vlnových rovníc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \Gamma^2 \psi = 0 \qquad (2.5.8)$$

kde

$$\Gamma = \sqrt{k^2 n^2 - \beta^2} \qquad (2.5.9)$$

Priečna konštanta šírenia

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \qquad (2.5.10)$$

Vlnové číslo

Substitúciou

$$\Psi(r,\varphi) = R(r)\,\phi(\varphi) \qquad (2.5.11)$$

dostaneme :

a) Rovnicu kmitania

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \phi = 0 \qquad (2.5.12)$$

ktorej riešenie je

$$\phi(\varphi) = \begin{cases} \cos(m\varphi + \xi) \\ \sin(m\varphi + \xi) \end{cases} \qquad (2.5.13)$$

b) Beselovu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \left(\Gamma^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0 \qquad (2.5.14)$$

ktorej riešenie je

$$R(r) = \begin{cases} A J_m(\Gamma r) + A' N_m(\Gamma r) & (pre\ \Gamma\ reálne) \\ C K_m(gr) + C' I_m(gr) & \begin{pmatrix} pre\ \Gamma = jg\ čisto \\ imaginárne \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (2.5.15)$$

kde

J_m – Besselova funkcia prvého druhu,
N_m – Besselova funkcia druhého druhu (tzv. Neumannova funkcia)
K_m – modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu
I_m – modifikovaná Besselova funkcia druhého druhu m-tého rádu

2.5.2 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V JADRE A PLÁŠTI OV

Pre konštantu šírenia β platí

$$kn_2 < \beta < kn_1 \tag{2.5.16}$$

Dve riešenia elektromagnetického poľa OV

$$E_{0z} = \begin{cases} AJ_m(\Gamma_1 r)\sin m\varphi & (\,pre\ r \le a\,) \\ CK_m(g_2 r)\sin m\varphi & (\,pre\ r \ge a\,) \end{cases} \tag{2.5.17}$$

$$H_{0z} = 0 \quad (\,všade\,) \tag{2.5.18}$$

a

$$H_{0z} = \begin{cases} BJ_m(\Gamma_1 r)\cos m\varphi & (\,pre\ r \le a\,) \quad (2.5.19) \\ DK_m(g_2 r)\cos m\varphi & (\,pre\ r \ge a\,) \quad (2.5.20) \end{cases}$$

$$E_{0z} = 0 \quad (\,všade\,) \tag{2.5.21}$$

A, B, C, D – integračné konštanty

V jadre OV je

$$E_{0r} = \left[-A\frac{j\beta a}{u}J'_m\left(u\frac{r}{a}\right) + B\frac{j\omega a^2\mu_0 m}{u^2 r}J_m\left(u\frac{r}{a}\right)\right]\sin m\varphi \tag{2.5.22}$$

$$E_{0\varphi} = \left[-A\frac{j\beta a^2 m}{u^2 r}J_m\left(u\frac{r}{a}\right) + B\frac{j\omega a\mu_0}{u}J'_m\left(u\frac{r}{a}\right)\right]\cos m\varphi \tag{2.5.23}$$

$$E_{0z} = A\,J_m\left(u\frac{r}{a}\right)\sin m\varphi \tag{2.5.24}$$

$$H_{0r} = \left[A\frac{j\omega a^2\varepsilon_1 m}{u^2}J_m\left(u\frac{r}{a}\right) - B\frac{j\beta a}{u}J'_m\left(u\frac{r}{a}\right)\right]\cos m\varphi \tag{2.5.25}$$

$$H_{0\varphi} = \left[-A\frac{j\omega a\varepsilon_1}{u}J'_m\left(u\frac{r}{a}\right) + B\frac{j\beta a^2 m}{u^2 r}J_m\left(u\frac{r}{a}\right)\right]\sin m\varphi \tag{2.5.26}$$

$$H_{0z} = B\,J_m\left(u\frac{r}{a}\right)\cos m\varphi \tag{2.5.27}$$

kde

$$u = \Gamma_1 a = a\sqrt{n_1^2 k^2 - \beta^2} \tag{2.5.28}$$

V plášti OV

$$E_{0r} = \left[C\frac{j\beta a}{w}K'_m\left(w\frac{r}{a}\right) - D\frac{j\omega a^2\mu_0 m}{w^2 r}K_m\left(w\frac{r}{a}\right)\right]\sin m\varphi \tag{2.5.29}$$

$$E_{0\varphi} = \left[C\frac{j\beta a^2 m}{w^2 r}K_m\left(w\frac{r}{a}\right) - D\frac{j\omega a\mu_0}{w}K'_m\left(w\frac{r}{a}\right)\right]\cos m\varphi \tag{2.5.30}$$

$$E_{0z} = C\,K_m\left(w\frac{r}{a}\right)\sin m\varphi \tag{2.5.31}$$

$$H_{0r} = \left[-C\frac{j\omega a^2\varepsilon_2 m}{w^2 r}K_m\left(w\frac{r}{a}\right) + D\frac{j\beta a}{w}K'_m\left(w\frac{r}{a}\right)\right]\cos m\varphi \tag{2.5.32}$$

$$H_{0\varphi} = \left[C \frac{j\omega a\varepsilon_2}{w} K'_m\left(w\frac{r}{a} \right) - D \frac{j\beta a^2 m}{w^2 r} K_m\left(w\frac{r}{a} \right) \right] \sin m\varphi$$

(2.5.33)

$$H_{0z} = D\,K_m\left(w\frac{r}{a} \right) \cos m\varphi \qquad (2.5.34)$$

kde

$$w = \left| \Gamma_2 \right| a = g_2 a = a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k^2} \qquad (2.5.35)$$

2.5.3 KLASIFIKÁCIA VIDOV

A. m = 0
1. B = D = 0 – TM vidy (TM_{0l})
2. A = C = 0 – TE vidy (TE_{0l})

B. m $\geq$ 1 – EH a HE vidy

2.5.4 EXAKTNÉ RIEŠENIE PRE KONŠTANTU ŠÍRENIA

Z okrajových podmienok na rozhraní r = a (jadro – plášť OV)

$$E_{0z}^{(1)} = E_{0z}^{(2)} \qquad (2.5.36)$$

$$E_{0\varphi}^{(1)} = E_{0\varphi}^{(2)} \qquad (2.5.37)$$

$$H_{0z}^{(1)} = H_{0z}^{(2)} \qquad (2.5.38)$$

$$\varepsilon_1 E_{0r}^{(1)} = \varepsilon_2 E_{0r}^{(2)} \qquad (2.5.39)$$

$$\mu_1 H_{0r}^{(1)} = \mu_2 H_{0r}^{(2)} \qquad (2.5.40)$$

Sústava homogénnych lineárnych rovníc

$$\det\left[M\right] = 0 \tag{2.5.41}$$

z čoho **charakteristická rovnica OV**

$$\left[\frac{J'_m(u)}{u\,J_m(u)}+\frac{K'_m(w)}{w\,K_m(w)}\right]\cdot\left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,\frac{J'_m(u)}{u\,J_m(u)}+\frac{K'_m(w)}{w\,K_m(w)}\right]=$$

$$= m^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{w^2}\right)\cdot\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\,\frac{1}{u^2}+\frac{1}{w^2}\right) \tag{2.5.42}$$

$$u^2+w^2=a^2\left(n_1^2k^2-\beta^2\right)+a^2\left(\beta^2-n_2^2k^2\right)=k^2n_1^2a^2\,2\Delta \tag{2.5.43}$$

a) TM vidy

- m = 0, B = D = 0

$$\frac{\varepsilon_1 J'_0(u)}{\varepsilon_2 u J_0(u)}+\frac{K'_0(w)}{wK_0(w)}=0 \tag{2.5.44}$$

b) TE vidy

- m = 0, A = C = 0

$$\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)}+\frac{K'_0(w)}{wK_0(w)}=0 \tag{2.5.45}$$

c) Hybridné vidy

- m $\geq$ 1

2.5.5 APROXIMÁCIA SLABOVEDÚCICH OPTICKÝCH VLÁKIEN

$\Delta \ll 1 \Rightarrow (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / \varepsilon_1 \ll 1$

1. Konštanta šírenia TM vidov sa približne rovná konštante šírenia TE vidov
2. Konštanta šírenia hybridných vidov (m $\geq$ 1) sa dá vyjadriť v omnoho jednoduchšom tvare.

$$\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} = \pm m\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right) \tag{2.5.46}$$

v jednotnom tvare

$$\frac{u\left\{2\left(\frac{m-1}{u}\right)J_{m-1}(u) - J_{m-2}(u)\right\}}{J_{m-1}} = \\ = \frac{w\left\{2\left(\frac{m-1}{w}\right)K_{m-1}(w) + K_{m-2}(w)\right\}}{K_{m-1}} \tag{2.5.47}$$

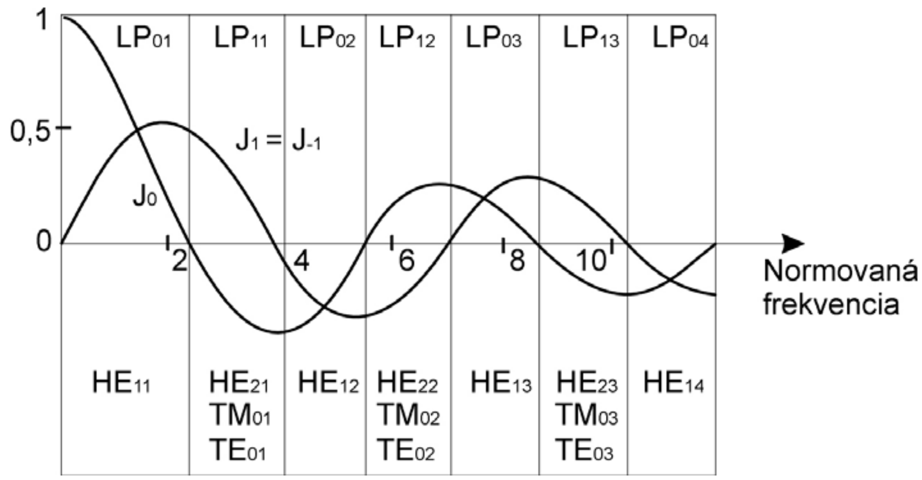
Charakteristická rovnica OV

$$\frac{uJ_{m'-1}(u)}{uJ_{m'}(u)} = -\frac{wK_{m'-1}(w)}{K_{m'}(w)} \tag{2.5.48}$$

m´ je

$$m' = \begin{cases} 1 & (\textit{pre TM a TE vidy}), \\ m+1 & (\textit{pre HE vidy}), \\ m-1 & (\textit{pre HE vidy}). \end{cases} \tag{2.5.49}$$

Zavedenie **linéarne polarizovaných (LP) vidov**.



Obr. 2.17 Oblasti vzniku LP vidov v homogénnom SI – MM OV.
definujú sa parametre

$$v = ka(NA) = kn_1 a\sqrt{2\Delta} \tag{2.5.50}$$

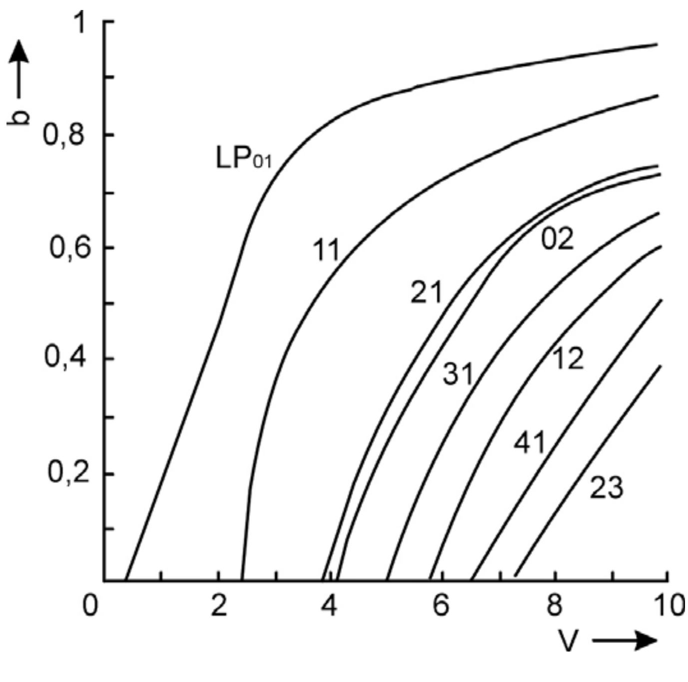
Normovaná frekvencia

$$\beta = kn_1\sqrt{1-\frac{2\Delta u^2}{v^2}} \tag{2.5.51}$$

Fázová konštanta šírenia

$$b = 1-\frac{u^2}{v^2} = \frac{\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 - n_2^2}{2n_1^2\Delta} \tag{2.5.52}$$

Normovaná konštanta šírenia.



Obr. 2.18 Normovaná konštanta šírenia b ako funkcia normovanej frekvencie v pre niektoré $LP_{m'l}$ vidy.

2.5.6 KRITICKÉ FREKVENCIE VIDOV

- $kn_2 < \beta$ (2.5.53)
- $\beta = kn_2$ (2.5.54)

Kritická (medzná) podmienka – kritická (medzná) frekvencia.

- **Šíriace sa vidy**
- **Vyžiarené vidy**
- **Vytekajúce vidy**.

Kritické frekvencie v_c $LP_{m' l}$ vidov

$$v_c = \alpha_{(m'-1)l} \tag{2.5.55}$$

$$v_c = \begin{cases} \alpha_{0l} & pre\ TM_{0l}\ a\ TE_{0l}\ vidy, \\ \alpha_{ml} & pre\ EH_{ml}\ vidy\ (m \geq 1), \\ 0\ a\ \alpha_{1l} & pre\ HE_{1l}\ vidy, \\ \alpha_{(m-2)l} & pre\ HE_{ml}\ vidy\ (m \geq 2). \end{cases} \tag{2.5.56}$$

2.5.7 LINEÁRNE POLARIZOVANÉ VIDY

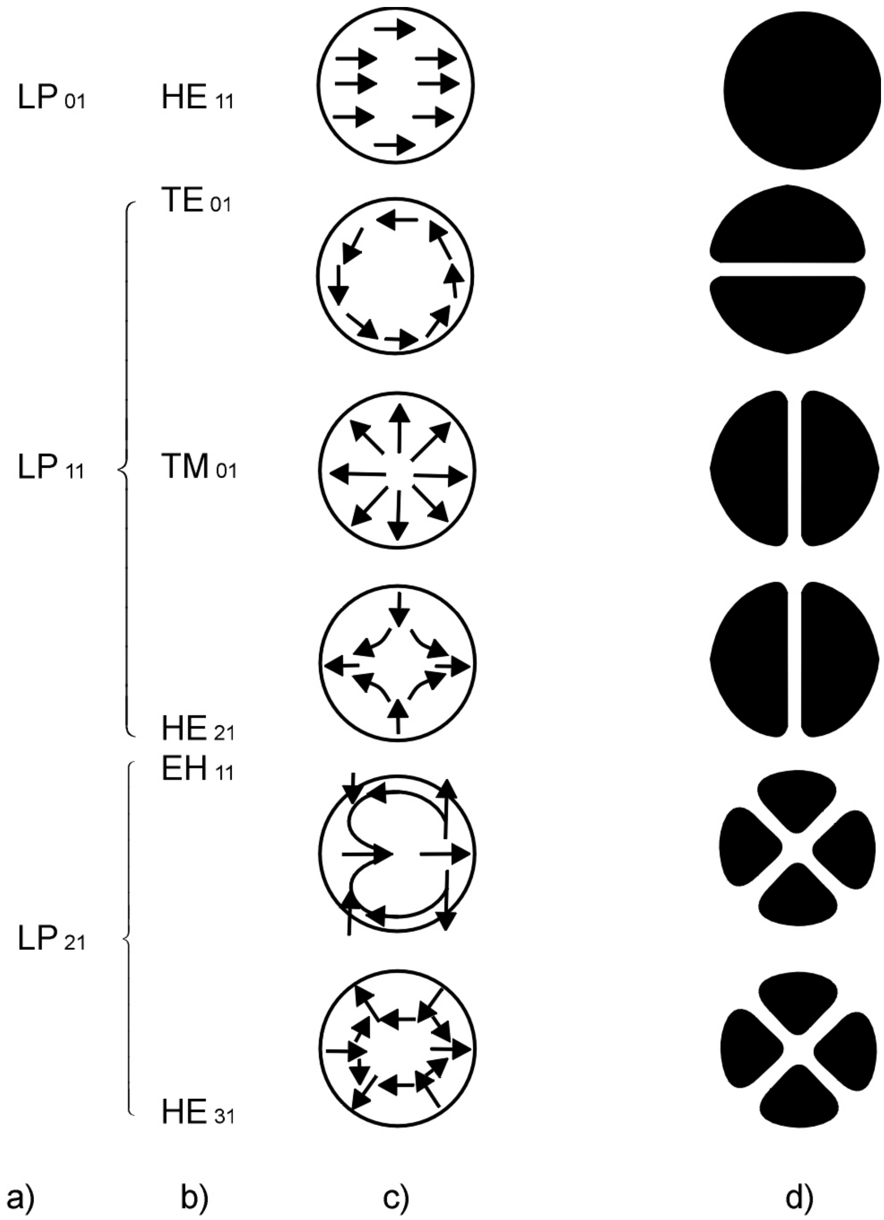
LP vidy – lineárne polarizované vidy

Vlnové obrazce (**vidové obrazce**) **– obr. 2.19**

Tabuľka 2.1

ROZDELENIE 10 NAJNIŽŠÍCH LP VIDOV

LP vidy	Tradičné označenie a počet Vidov	Stupeň degenerácie
LP_{01}	HE_{11} x 2	2
LP_{11}	TE_{01}, TM_{01}, HE_{21} x 2	4
LP_{21}	EH_{11} x 2, HE_{31} x 2	4
LP_{02}	HE_{12} x 2	2
LP_{31}	EH_{21} x 2, HE_{41} x 2	4
LP_{12}	TE_{02}, TM_{02}, HE_{22} x 2	4
LP_{41}	EH_{31} x 2, HE_{51} x 2	4
LP_{22}	EH_{12} x 2, HE_{32} x 2	4
LP_{03}	HE_{13} x 2	2
LP_{051}	EH_{41} x 2, HE_{61} x 2	4



Obr. 2.19 Rozloženie intenzity elektrického poľa troch najnižších LP vidov v homogénnom SI – MM OV:označenie LP vidov, (b) tradičné označenie vidov, (c) rozloženie elektromagnetického poľa tradičných vidov, (d) rozloženie E_{0x} pre LP vidy.

2.5.8 MNOHOVIDOVÉ A JEDNOVIDOVÉ OPTICKÉ VLÁKNA

Vidový objem M_s pre SI – MM OV

$$M_s \cong \frac{v^2}{2} \tag{2.5.57}$$

- **Vidová konverzia**)

Šírenie len dominantného vidu LP_{01} OV

$$0 < v = k\, n_1 a \sqrt{2\Delta} < v_c^{LP_{11}} \cong 2{,}405 \tag{2.5.58}$$

Jednovidové stupňovité (SI - SM) OV – môžu sa šíriť dva vidy LP_{01} s navzájom ortogonálnou polarizáciu

2.6 VLNOVÁ TEÓRIA ŠÍRENIA SVETLA V OPTICKOM VLÁKNE SO SPOJITOU ZMENOU INDEXU LOMU

- **WKB metóda**

$$E_x = \frac{1}{2} \left| G_1(r)\, e^{jS(r)} + G_2(r)\, e^{-jS(r)} \right| \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} e^{j\beta z} \tag{2.6.1}$$

$G_i(r)$ – **amplitúdové funkcie**
$S(r)$ – **fázová funkcia**

WKB metódu možno použiť na výpočet konštánt šírenia pre vedené vidy v gradientnom optickom vlákne

$$\beta = n_1 k \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{2\Delta}}{n_1 k a}\,(2l + m + 1)} \tag{2.6.2}$$

Vidový objem gradientného OV je

$$M_g = \frac{\alpha}{\alpha+2}\left(n_1\,k\,a\right)^2\Delta \tag{2.6.3}$$

pre $\Delta \ll 1$ platí

$$M_g \cong \frac{\alpha}{\alpha+2}\,\frac{v^2}{2} \tag{2.6.4}$$

pre $\alpha = 2$

$$M_g \cong \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}M_s \tag{2.6.5}$$

Pre jednovidové gradientné OV

$$0 < v < v_c = 2{,}405\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}} \tag{2.6.6}$$