

Pripravené podľa: Doc. Dr. Ing. Jan Černocký UPGM FIT VUT Brno

Pripravené podľa: Pavol Adam, Úvod do metód spracovania zvuku v súčasnom multimediálnom prostredí

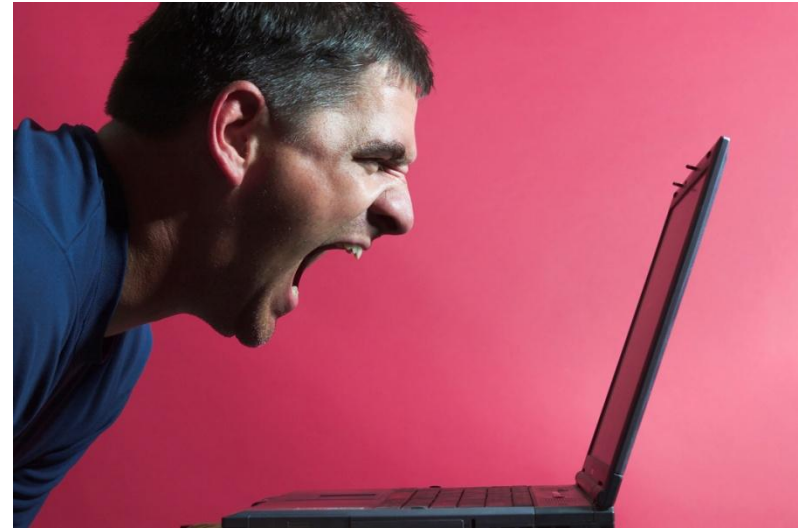


Vybrané metódy číslicového spracovania rečových signálov

doc. Ing. Jozef Juhár, CSc., Ing. Stanislav Ondáš

Plán

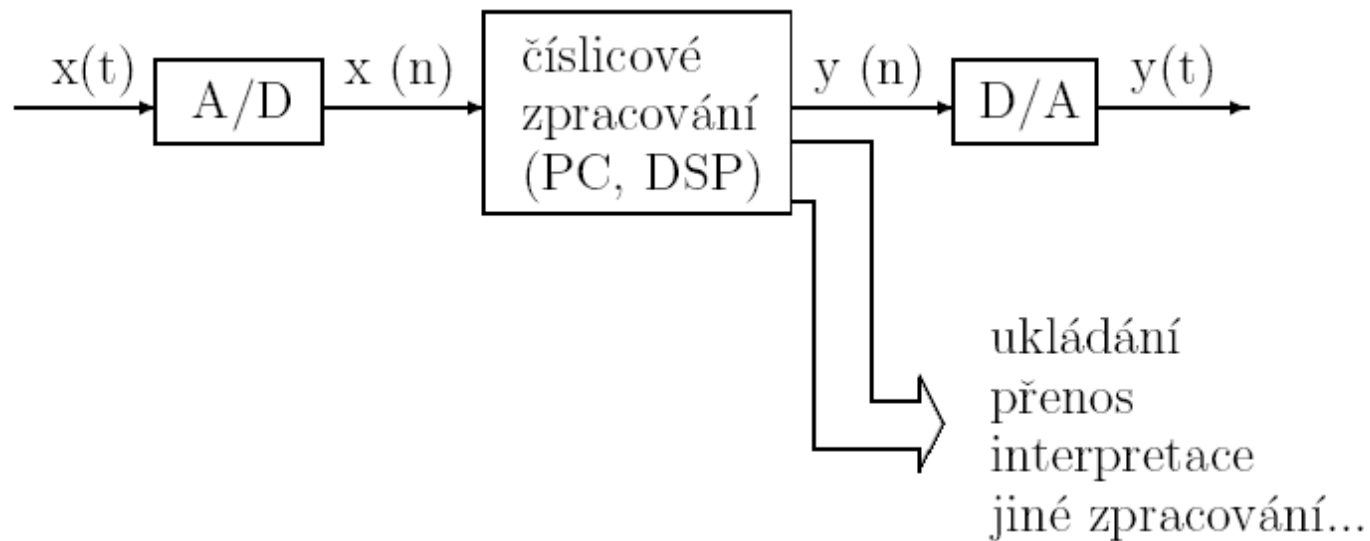
- Úvod
- Digitalizácia zvuku
- Analýza náhodných signálov
- Spektrum
- Filtre
- Z-transformácia



Prečo je výhodné číslicové spracovanie signálov?

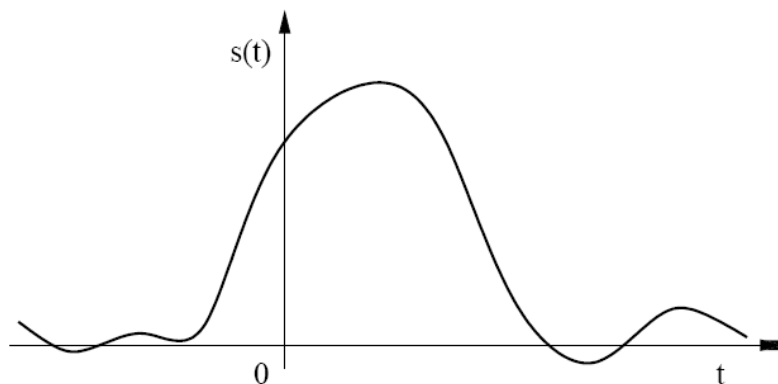
- Reproductivita (žiadna tolerancia súčiastok)
- Neexistujú zmeny kvôli starnutiu materiálov a teplote
- Nie je potrebné zložité nastavovanie (trimre a pod)
- Možnosť adaptívneho spracovania (prístroj sa „mení“ podľa vst. signálu)
- Kompatibilný s používaním moderných technológií, internetu, mobilných zariadení.

Signály so spojitým časom a vzorkovanie



- Na začiatku spracovania je signál spojitý *v čase* aj *hodnote*:
 - Je definovaný všade $-\infty$ do ∞ , a čas má ∞ veľa hodnôt

Signály so spojitým časom a vzorkovanie



Pre reprezentáciu signálu vo frekv. oblasti (spektrum), použijeme Fourierovu transformáciu

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt,$$

Funkcia $X(f)$ je *spektrálna funkcia* alebo spektrum.

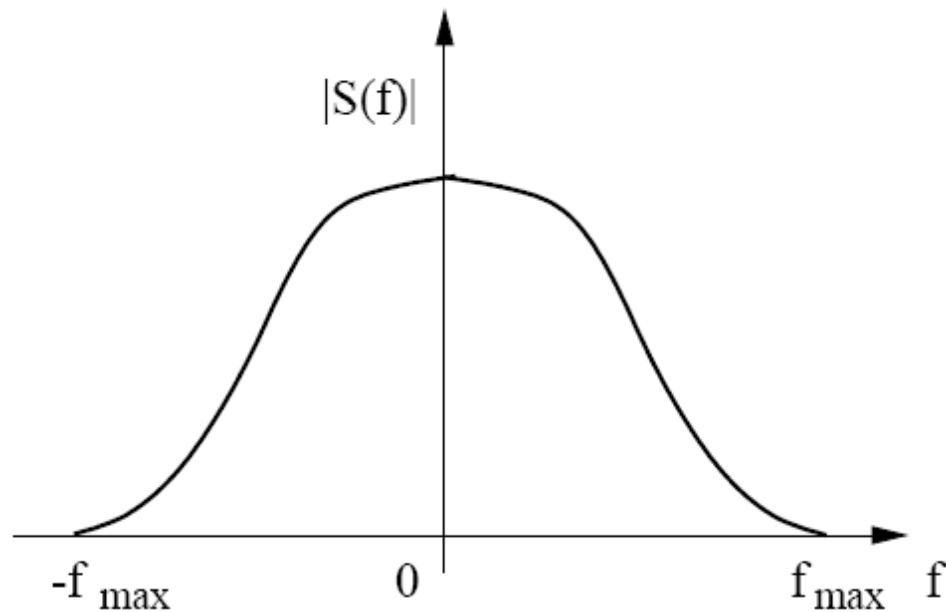
- Je definovaná pre $\forall f$ od $-\infty$ do ∞ a je komplexná.

- Má **modul** $|X(f)|$ a **argument** $\angle X(f)$. Hovoríme o **modulovom** a **argumentovom spektre**.

Pre reálne signály nám stačí poznať iba pravú časť spektrálnej funkcie ($f > 0$), pretože ľavá časť je s ňou komplexne združená.

Spektrálna funkcia

$X(f) = X^*(-f)$, alebo $|X(f)| = |X(-f)|$ a $\arg X(f) = -\arg X(-f)$.



Digitalizácia

- Digitalizácia
 - diskretizácia (vzorkovanie)
 - kvantovanie

- Základné parametre digitalizovaného signálu:
 - Vzorkovacia frekvencia F_{vz}
 - Počet bitov na vzorku N
 - Typ kvantizátora a kódu dát
 - Usporiadanie súboru s hlasovým signálom (hlavička, počet bytov, ...)

A/D prevod

- A/D prevodník **vzorkuje** analógový signál do číslicovej podoby.
- Inými slovami:
 - v diskretných časových intervaloch (akoby pulzoch) meria úroveň analógového signálu (zväčša napätia, ktoré vzniká zmenou odporu mikrofónu pri zmene tlaku vzduchu v jeho okolí) a s danou presnosťou zaznamenáva, **kvantuje** jej hodnotu (teda zaokrúhľuje spojité signál na diskretné číslo).
 - zdanlivo ide o moduláciu (konvolúciu) pôvodného signálu signálom s pravidelnou pulznou charakteristikou, z čoho pochádza aj označenie výsledného číselného zápisu takto získaného zvuku – **PCM** (*pulse-code modulation*, teda **pulzne kódová modulácia**), ktorý prvý raz popísal britský vedec Alec Reeves v r. 1937.

Nyquist a Shannon

- Vzorkovanie sa opiera o práce dvoch vedcov z amerického Bell Laboratories:
- **Harry Nyquist** ukázal, že pri použití zvolenej vzorkovacej frekvencie budú v signáli zaznamenané všetky frekvencie menšie než polovičná hodnota vzorkovacej frekvencie (tzv. **Nyquistova frekvencia**).
- Problém môže nastať pri reprodukcii tohto záznamu. V dôsledku aliasingu vznikajú frekvencie, ktoré v pôvodnom zázname neboli prítomné.
- **Claude Shannon** preto navrhol odfiltrovať frekvencie vyššie než *Nyquistova frekvencia* (ešte pred záznamom a aj pri samotnej reprodukcii), čím by sa zabránilo vzniku nežiaducich javov.

Problém odstránenia vyšších frekvencií zo signálu

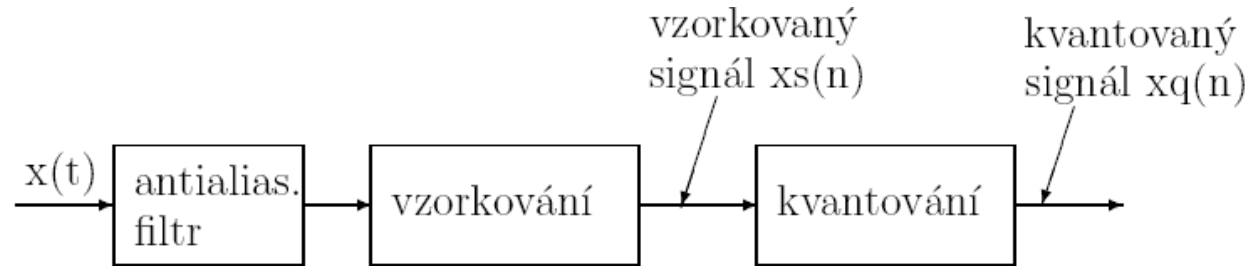
- Frekvencie však nemožno od istého momentu len tak „odrezať“...
- Elektronické súčiastky dovolili len spojitú frekvenčnú charakteristiku filtra,
 - tzn. od Nyquistovej frekvencie by dochádzalo k útlmu, úplné vynulovanie signálu by však prišlo až s podstatným zvýšením frekvencie signálu.
- Pre tento plynulý priebeh sa namiesto vzorkovacej frekvencie 40 kHz (dvakrát hodnota najvyššej frekvencie, ktorú človek môže počuť) vyberali vyššie hodnoty – zväčša 44,1 kHz.
- Frekvenčný filter mal potom pokles charakteristiky v rozsahu 21 - 23 kHz,
 - prípadné deformácie v signáli vznikali už v nepočuteľnej oblasti ultrazvuku.

Súčasný „štandard“ v oblasti vzorkovania.

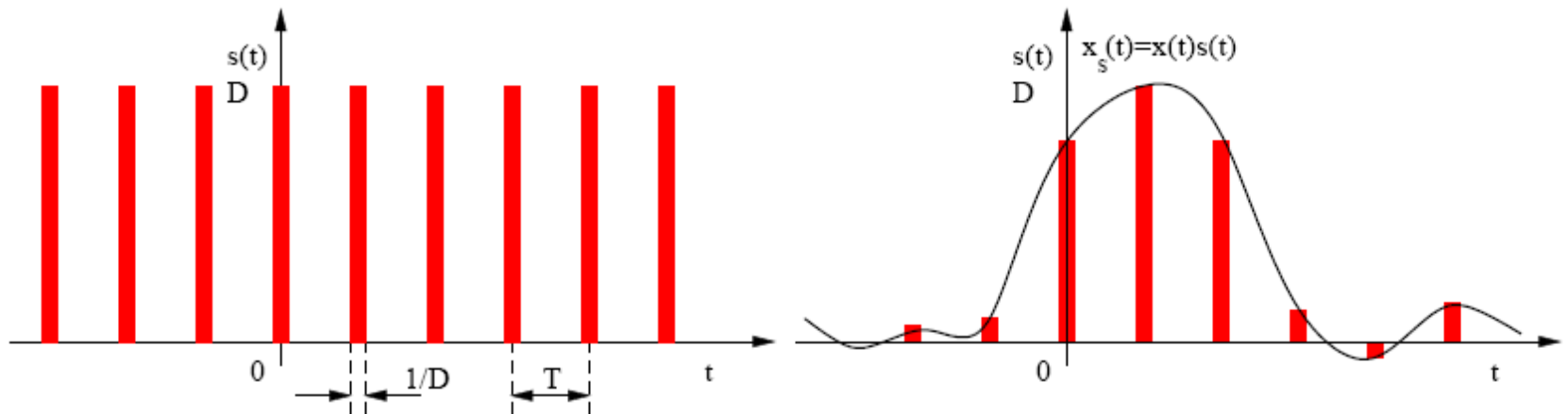
Zvyčajne sa používajú vzorkovacie frekvencie 44,1 kHz a 48 kHz, v novších, najmä profesionálnych zariadeniach je to 96 kHz, dokonca i 192 kHz (v kombinácii s 24-bitovým kvantovaním sa takýto zvuk nazýva **zvuk s vysokým rozlíšením**, angl. *High Definition Audio*, **HD Audio**).

Často sa tiež začína využívať 32-bitové rozlíšenie.

Analógovo-číslicový (AD) prevod

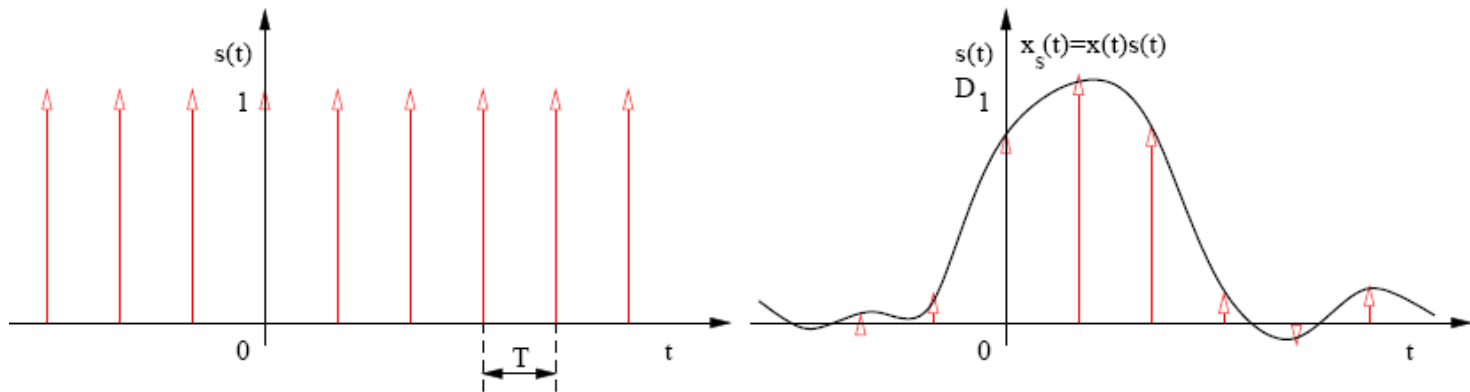


- Vzorkovaný signál, dostaneme tak, že pôvodný signál vynásobíme niečím čo je periodické v čase.



Analógovo-číslicový (AD) prevod

- Teoreticky vysvetľujeme vzorkovanie tak, že násobíme signál periodickým sledom Diracových impulzov (nekonečná výška, nulová šírka, plocha – mocnina 1tky). Po násobení dostaneme opäť periodický sled Diracových impulzov, ale s hodnotami pôvodného signálu v bodoch nT :



T - vzorkovacia perióda
 $F_s = 1/T$ – vzorkovacia frekvencia

Metódy analógovo-číslicového (AD) prevodu

- Lineárna PCM
- Nelineárne kvantovanie: a-law, μ -law
- Adaptívne kvantovanie
- Kvantovanie s prediktorom

Metódy analógovo-číslicového (AD) prevodu

Lineárna PCM

- Významný údaj: veľkosť a počet kvant. krokov
 - determinuje maximálne dosiahnutelnú dynamiku záznamu.
 - Mala by byť okolo 50dB
 - Na to potrebujeme aspoň 10 bitov (9 + 1znamienkový) = 512 úrovní pre každú polaritu
- **Bežný štandard s dostatočnou dynamickou rezervou:**
 - **16bit linear PCM**
 - Najrozšírenejší formát
 - Dynamika 90dB
 - Je súčasťou **Microsoft RIFF WAVE formátu (.wav)**
- Kvantizačná chyba
 - Maximálne 0,5q
 - q = kvantizačný krok
 - Spôsobuje kvantizačný šum
- SNR – Signal to Noise Ratio – pomer signálu k šumu
 - Každý bit navyše = cca + 6dB
 - **Kvantizačná chyba pridáva do signálu kvant. šum, čím zhoršuje aj SNR!**

Metódy analógovo-číslicového (AD) prevodu

Nelineárne kvantovanie *a-law*, *μ-law*

- Rieši nevýhody lin. kvantovania pri reči. Početné zastúpenie vzoriek s malou abs. hodnotou. => logaritmické kvantovanie *a-law*, *μ-law*.
- Sú súčasťou G.711 normy
- V telekom. sa používa **8bit** kvant. (7 + znamienkový)
 - z hľadiska dynamika to isté ako **12bit linear**.
- **a-law sa používa v Európe** ($a = 87,56$)
- v štandarde G.711 sa skutočný prevod realizuje po úsekoch *lineárnej aproximácie teoretickej závislosti* (priebehu)
- *μ-law* sa používa v severnej Amerike a Japonsku ($\mu = 255$).

Vzorce a-law

$$y[n] = \begin{cases} Y_{\max} \cdot \frac{a}{1 + \ln a} \cdot \frac{|x[n]|}{X_{\max}} \cdot \operatorname{sgn} x[n] & \text{pre } |x[n]| < X_{\max}/a \\ Y_{\max} \cdot \frac{1 + \ln \frac{a \cdot |x[n]|}{X_{\max}}}{1 + \ln a} \cdot \operatorname{sgn} x[n], & \text{pre ostatné} \end{cases}$$

Metódy analógovo-číslicového (AD) prevodu

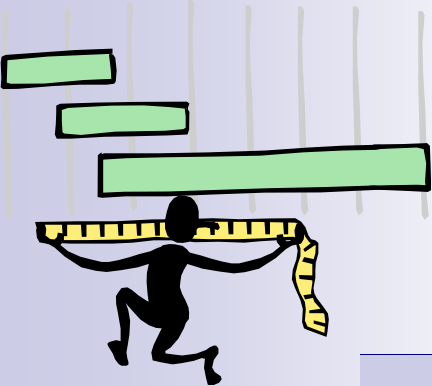
Adaptívne kvantovanie

- *nelineárny kvantizátor* = kvantizačné úrovne rozložené **nelineárne** ale **fixne** vo vnútri dyn. rozsahu.
- *adaptívny kvantizátor* = kvantizačné úrovne sa dynamicky menia podľa vstupného signálu
- reč. signál: na rôznych intervaloch, rôzna veľkosť úrovní (zn/nzn)
 - ideálne by bolo prepínanie rôznych kvantizátorov
- využitie dopredných a spätných adapterov
- Obrázok (32)

Metódy analógovo-číslicového (AD) prevodu

Kvantovanie s prediktorom

- založený na korelácií susedných vzoriek
 - rozdiel dvoch susedných vzoriek je podstatne menší ako ich abs. hodnota
 - je teda výhodné kvantovať tieto rozdiely, nie samotné vzorky => menší počet bitov
 - **DPCM – diferenciálna PCM**
- Iný pohľad:
 - kódovanie signálu je možné si predstaviť tak, že odhadujeme veľkosť nasledujúcej vzorky a prenášame len rozdiel skutočného signálu a odhadnutej vzorky.
 - Obr. (33)
 - využitie fixného prediktora nedáva postačujúce výsledky, preto => **adaptívny prediktor**
 - Ak sa vlastnosti adapt. prediktora menia s priebehom signálu => **kóder s lineárnym predikčným kódovaním (LPC)**



Kvantovanie z iného pohľadu

- Súčasné digitálne systémy sú binárne, preto je potrebné zaznamenať údaj binárnym číslom nejakej dĺžky.
- Táto dĺžka sa nazýva **rozlíšenie vzorky** alebo **bitová hĺbka vzorky**. Prvotné zvukové systémy mali rozlíšenie 8 bitov (teda zaznamenaná úroveň bola vyjadrená celými číslami v rozsahu -128 a 127, dokopy $256 = 2^8$ úrovni).
- Súčasné systémy používajú skôr 16 bitov (65 536 úrovní), lepšie 20 bitov (vyše milióna úrovní) a 24 bitov (vyše 16 miliónov úrovní), profesionálne dokonca 32 bitov (vyše 4 miliardy úrovní).
- Platí, že každý ďalší bit zdvojnásobuje počet hodnôt v rozsahu (rozšírenie dynamického rozsahu o 6 dB)
- Dostávame tak rozsah 48 dB pre osembitové, 96 dB pre šestnásťbitové zariadenia.
- Treba spomenúť aj existenciu zápisov s pohyblivou desatinnou čiarkou.
 - Najrozšírenejší je tzv. *IEEE float 32* (ANSI/IEEE Std. 754-1985), čo je tridsaťdvabitové číslo (24 bitov na mantisu), existuje i formát s dĺžkou 64 bitov.

- Pri kvantovaní je aktuálna úroveň zaokrúhľená k najbližšej hodnote prítomnej v danom delení (rozlíšení).
- Vzniká chyba zo zaokrúhľenia – **kvantovací šum** (angl. *quantization noise*),
 - keďže sa táto chyba prejavuje v každom (diskrétnom) časovom okamihu a vytvára vo všeobecnom prípade biely šum.
- Ak ide o rovnomerné delenie (väčšina prípadov), odstup jednotlivých kvantovacích hodnôt (alebo rozdiel medzi nimi) sa nazýva **kvantovací krok** alebo **kvantovací interval**.

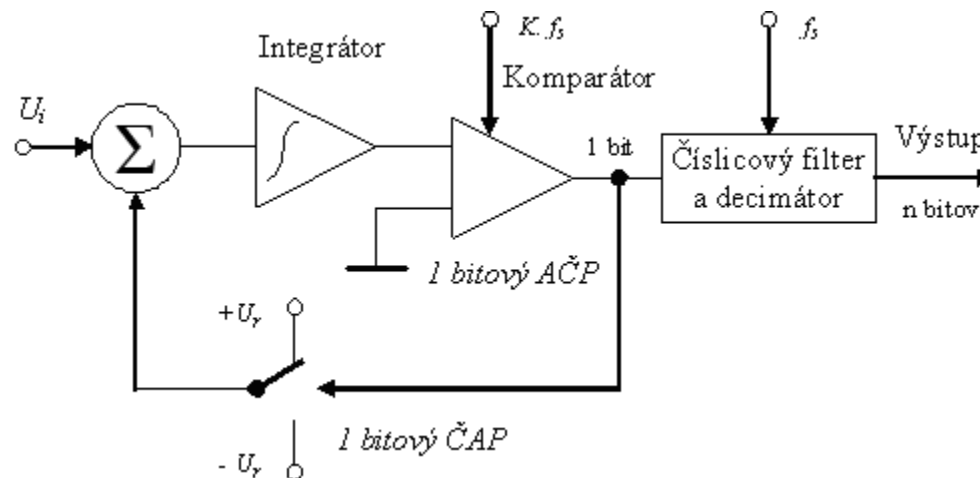
Delta-sigma modulátor

- Historicky pôvodný spôsob kvantovania signálu založený na **komparátore**.
 - **porovnáva úroveň vstupného signálu s referenčnou hodnotou**. Ak je signál väčší, zvýši referenčnú hodnotu (počnúc najvyšším, najvýznamnejším bitom hodnoty – ten nastaví na jednotku), ak je nižší, zníži ju (vynuluje bit).
- Predstavme si, že *komparátor* porovnáva vstupný signál s hodnotou predtým vyjadrenej úrovne signálu. Výsledkom sú dva stavy:
 - 1, ak treba hodnotu oproti predošlej zvýšiť (keďže vstupný signál je už vyšší), 0, ak znížiť.
 - „Predtým vyjadrenú úroveň“ vypočítame ako súčet binárnych hodnôt výstupu vo zvolenom časovom okne.
 - Výhody – jednoduchá konštrukcia umožňuje vyššiu vzorkovaciu frekvenciu, rýchlejší cyklus (jedno porovnanie na vz. namiesto 8 alebo 16).
 - Výsledkom kvantovania je **tok jednobitových informácií**, teda teoreticky je kvantovací šum vyšší.
 - Ak zvolíme vysokú vz. frekvenciu (zvyčajne $64 \times 44,1$ kHz, teda 2 822,4 kHz) je väčšina šumu prítomná v ultrazvukových frekvenciách.
 - Na výstupe zariadenia je **decimátor**, ktorý podvzorkuje signál na zvolenú vzorkovaciu frekvenciu a rozlíšenie.
 - **Tento spôsob kvantovania sa nazýva delta-sigma modulácia.**

Delta-sigma modulátor

■ Výhody Σ - Δ prevodníkov

- Kompatibilita s technológiou VLSI (90 % obvodov prevodníka je realizovaných číslicovou technikou), čo umožňuje integráciu týchto prevodníkov spolu s obvodmi DSP na jednom čipe.
- Nízka cena týchto prevodníkov vychádza predovšetkým z predchádzajúcej vlastnosti, prispieva však k nej aj skutočnosť, že zvyšná časť analógových obvodov nevyžaduje vysokú presnosť (nie sú nevyhnutné presné obvody ani laserové trimovanie).
- Vysoká linearita je garantovaná princípom činnosti.
- Podstatne nižšie nároky na vstupný (obmedzovací) a výstupný (rekonštrukčný) analógový filter, ktoré sú zvyčajne súčasťou kompletného systému.

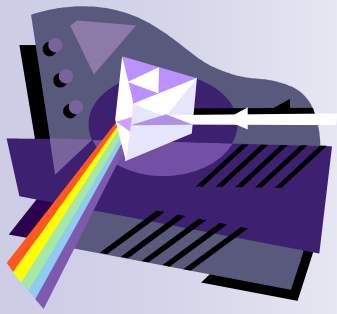


Dithering

- Pri kvantovaní sa používa aj **rozptyľovanie** - *dithering*.
 - Kvantovací šum nemusí byť totiž len šumom. Ak je vstup nejakým spôsobom korelovaný (vo väčšine prípadov je), kvantovací šum sa prejavuje skôr ako harmonické skreslenie.
 - Rozptyľovanie znamená náhodne zmeniť úroveň signálu v rozsahu kvantovacieho kroku ešte tesne pred jeho zmeraním.
 - Biely šum sa teda do zdroja dodáva pred kvantovaním, a to úmyselne.
 - Teda namiesto toho, aby bolo konkrétne číslo vždy zaokrúhlené tým istým smerom, je toto zaokrúhľované medzi susedné hodnoty tak, že štatisticky je interpretované svojou pôvodnou hodnotou.
 - Pri technike rozptyľovania možno využiť i spätnú väzbu a nasledujúcu dodanú chybu upraviť podľa chyby predošlej vzorky, na čom je založené tzv. **tvarovanie šumu** (*noise shaping*),
 - Využíva sa v delta-sigma modulátoroch, aby frekvenčnú charakteristiku kvantovacieho šumu ešte viac potlačilo smerom k ultrazvuku.

Problémy súvisiace s digitalizáciou zvuku

- **Šum.** Vzniká v každom obvode, preto aj v prevodníkoch (A/D aj D/A). Pôsobí nezávisle od kvantovacieho šumu.
- **Časové chvenie**, nestálosť (angl. *jitter*). Časový odstup medzi jednotlivými pulzmi vzorkovacej frekvencie nie je konštantný (závisí od kvality kryštálového oscilátora v A/D či D/A prevodníku, no žiaden nie je dokonalý). Vznikajú preto skreslenia vo frekvenčnej charakteristike výsledku.
- **Presnosť vzorkovacej frekvencie.** Ak si dve digitálne zariadenia vymieňajú dáta, unikátnosť kryštálových oscilátorov spôsobuje **synchronizačné problémy**.
 - Jedno zariadenie musí občas čakať na dáta toho druhého, čím vznikajú medzery v signáli, resp. nestíha za druhým zariadením – vtedy zas dochádza k zahodeniu časti dát, akoby preskakovaníu. Treba podotknúť, že tento problém sa dá riešiť systematicky vhodnými časovacími alebo synchronizačnými postupmi (na úrovni komunikácie zariadení), navyše sa vyskytuje zriedka (väčšinou prebieha spracovanie zvuku na jednom komplexnom zariadení, napr. počítači, bez nutnosti komunikácie).



Spektrum

Spektrum vzorkovaného signálu

- **Spektrum vzorkovaného signálu je periodické!** (Nakoľko ide o diskretný signál)

- Môžu nastať dve situácie:

1. $F_{vz} > 2 \cdot f_{max}$

Jednotlivé kópie pôvodného spektra sa neprekrývajú a pôvodný signál môžeme ideálne rekonštruovať tak, že vzorkovaný signál prefiltrujeme dolno-priepustným filtrom s medznou frekvenciou $F_{vz}/2$.

2. $F_{vz} \leq 2 \cdot f_{max}$

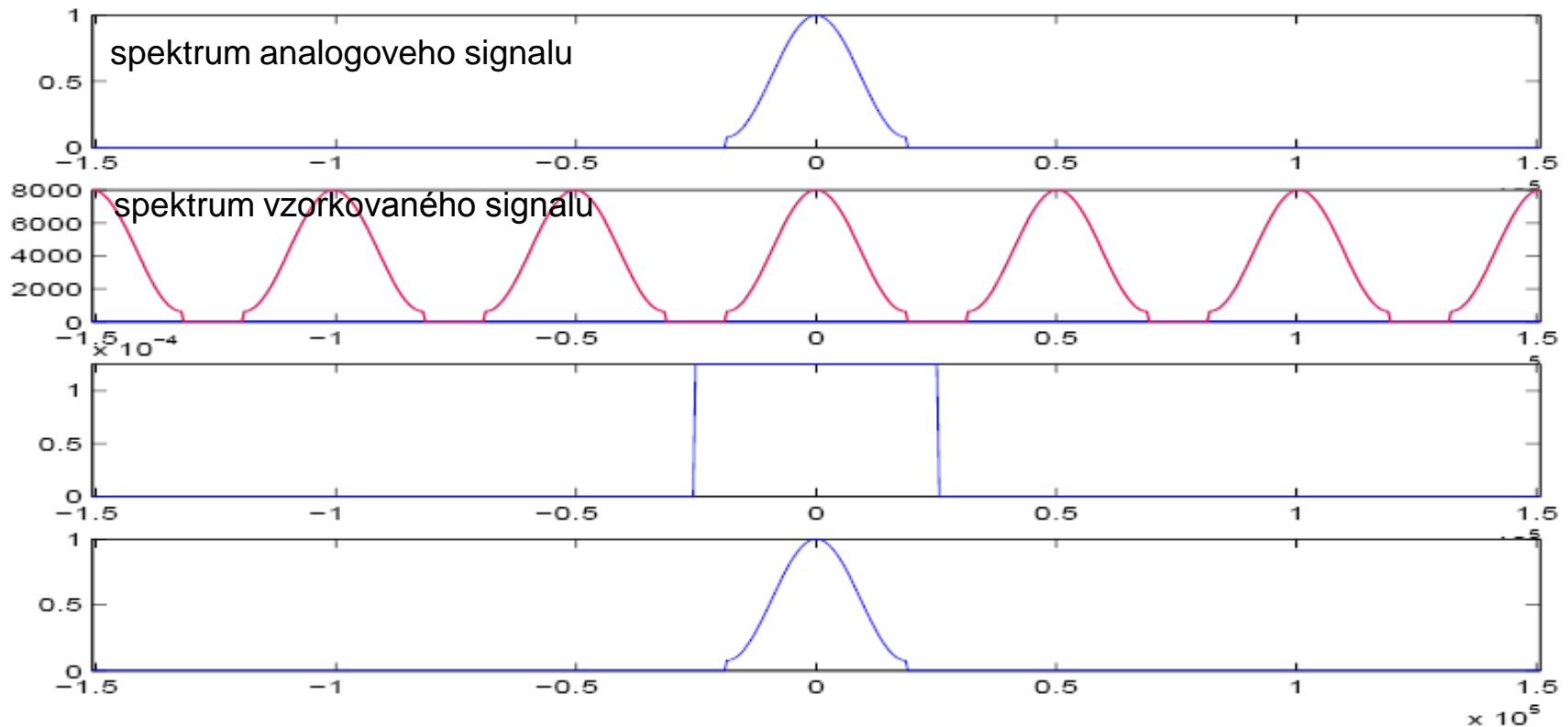
jednotlivé kópie pôvodného spektra sa prekrývajú, výsledné spektrum má iný tvar ako pôvodné. Pôvodný signál sa nedá rekonštruovať, dochádza k tzv. **aliasingu**.

Príklad vzorkovania a rekonštrukcie

$$F_{vz} > 2 \cdot F_{max}$$

$F_s = 8000 \text{ Hz}$, $f_{max} = 3000 \text{ Hz}$, a tedy $\Omega_s = 16000\pi \text{ rad/s}$, $\omega_{max} = 6000\pi \text{ rad/s}$.

$$T = \frac{1}{8000} \text{ s}$$

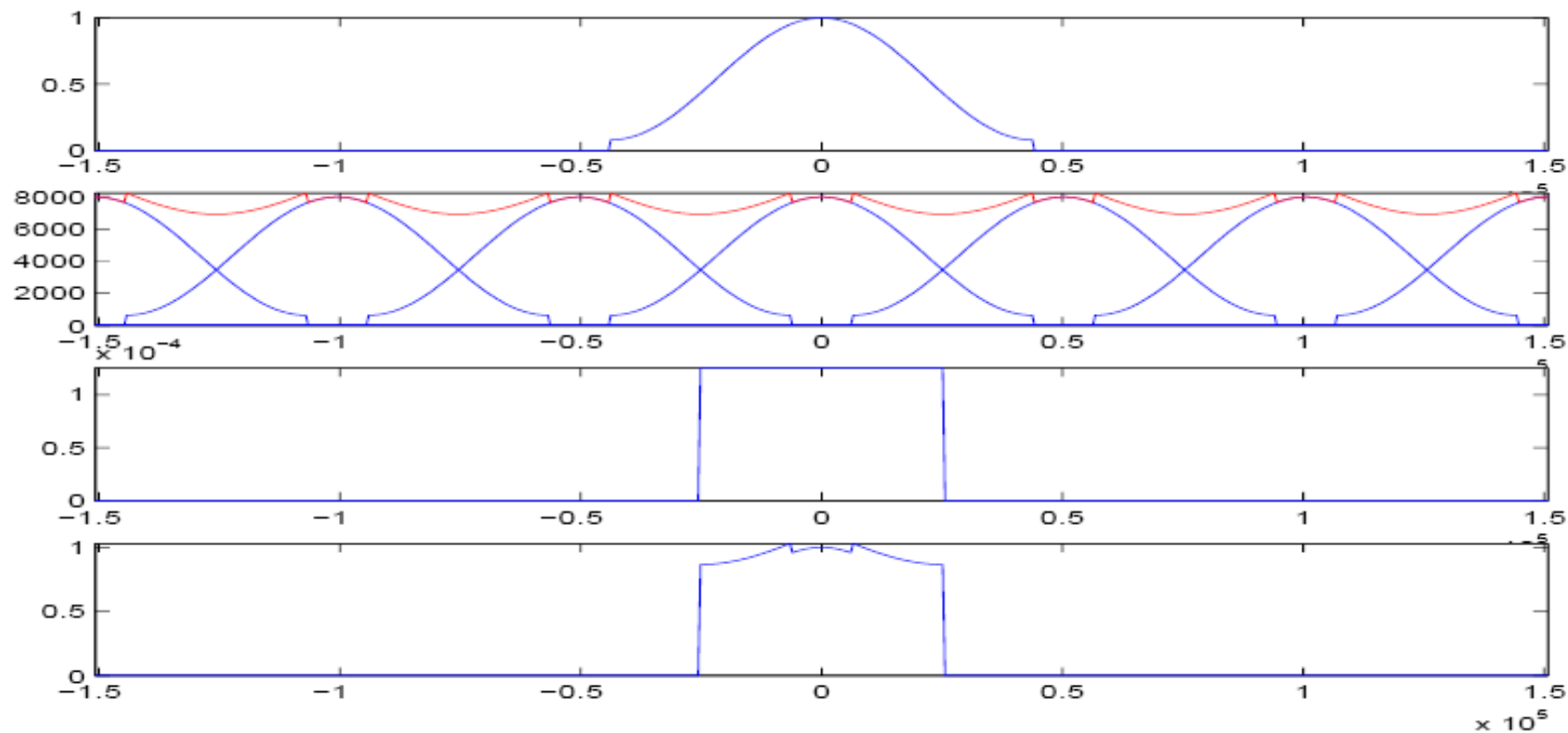


Príklad vzorkovania a rekonštrukcie

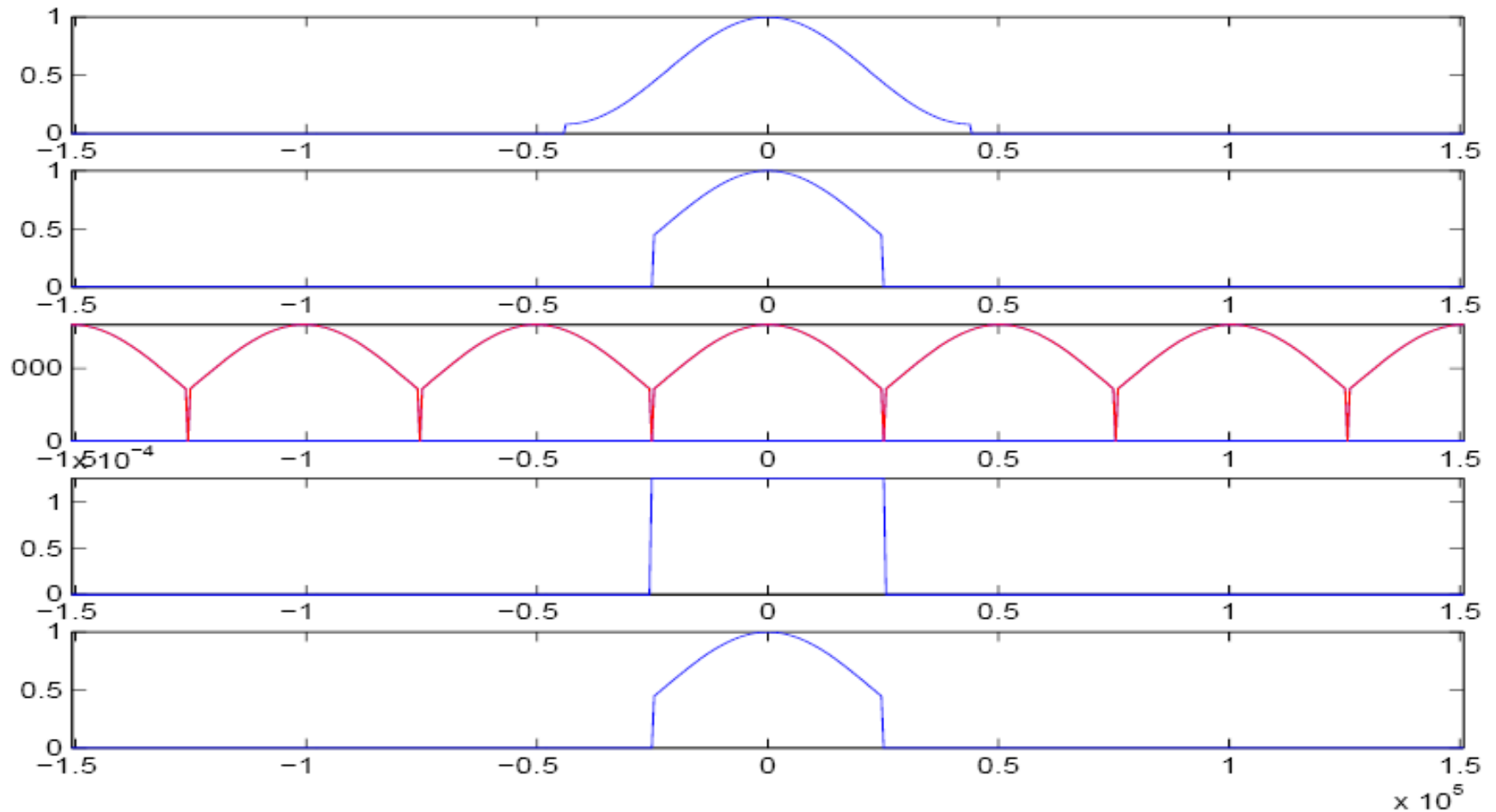
$$F_{vz} \leq 2 \cdot F_{max}$$

$F_s = 8000 \text{ Hz}$, $f_{max} = 7000 \text{ Hz}$, a tedy $\Omega_s = 16000\pi \text{ rad/s}$, $\omega_{max} = 14000\pi \text{ rad/s}$.

$$T = \frac{1}{8000} \text{ s}$$



Antialiasingový filter – obmedzenie na $[-F_{vZ}/2, F_{vZ}/2]$



Zápis vzorkovaného signálu

- $x_s(nT)$, alebo $x_s[n]$ - vzorkovaný signál je vlastne postupnosť čísel
 1. Ak máme vzorkovaný signál, musíme k nemu mať aj informáciu o vzorkovacej frekvencii (napr. hlavička súboru WAV)
 2. Ak počítame so vzorkovanými signálmi, radi sa času úplne zbavíme. Budeme predpokladať periódu $T'=1$, teda $F'_s = 1$. Normovaný čas je potom daný:

$$t' = \frac{t}{T}, \quad \text{takže} \quad n = \frac{nT}{T}$$

a normovaná frekvenciu

$$f' = \frac{f}{F_s}$$

Príklad:

Napíšte funkciu pre generovanie kosinusovky s frekvenciou 200Hz a $F_{vz} = 8\text{KHz}$.

spojitý čas: $s(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi 200t)$.

pri vzorkovaní nahradíme spojité čas t diskretným nT : $x(nT) = \cos(2\pi f_0 / F_s)n$.

Frekvencia f_0 / F_s je *normovaná frekvencia*. Výsledný signál môžeme teda zapísať:

$$x(n) = \cos (2\pi 1/400 n)$$

V Matlabe:

```
n = 0:7999;
```

```
x = cos (2*pi*1/400*n)
```

```
wavwrite(x,8000,16,'sig.wav');
```

Vzorkovaný signál vo frekv. oblasti - spektrum

- Diskrétna Fourierová transformácia – DFT – definícia:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad \text{pro } k \in \langle 0, N-1 \rangle$$

- Aplikovanie na diskretný signál...

- Analyzujeme okno o dĺžke N vzoriek.
- Čo bude vlastne výsledkom? Ak vynásobíme hodnoty $X(k)$ vzorkovacou periódou T , dostaneme aproximáciu spektrálnej funkcie vo frekvenčných bodoch $k\Delta f$ kde $\Delta f = F_s/N$.

$$\hat{X}(k\Delta f) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Vzorkovaný signál vo frekv. oblasti - spektrum

- Oproti spektrálnej funkcii získanej „analógovou“ FT môžeme identifikovať tieto rozdiely:
 1. Počítame **spektrum vzorkovaného signálu** => spektrum je **periodické** s periodou T , čo zodpovedá vzorkovacej frekvencii F_s .
 2. **Signál sme „vystrihli“ oknom**. Vypočítané spektrum nesie i vlastnosti tohto okna: okno v čase násobí signál, spektrum okna sa teda vo frekv. obl. *konvoluje* so spektrom signálu. To so sebou prináša **rozmazanie** teoreticky **ostrých spektrálnych čiar** (napr. pre harmonický signál)
 3. Spektrum je **diskrétné** (máme k dispozícii len N hodnôt od $0 - F_s$), takže sme vlastne spočítali spektrum **periodického** signálu! Môžeme si to predstaviť tak, že okno signálu sa nekonečne krát opakuje.

Vzorkovaný signál vo frekv. oblasti - spektrum

Čas

Frekvencia

vzorkovanie →

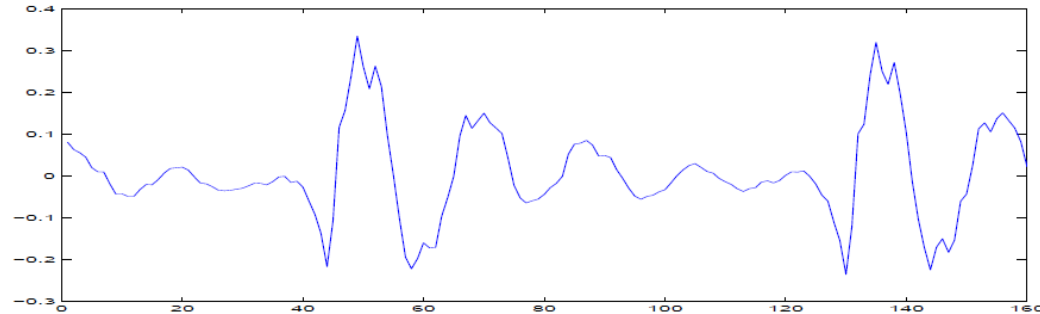
periodizácia

periodizácia →

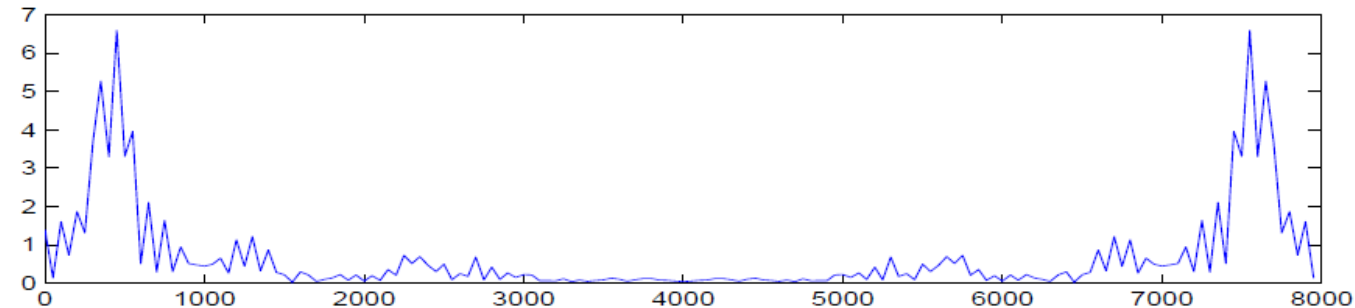
diskretizácia

Príklad

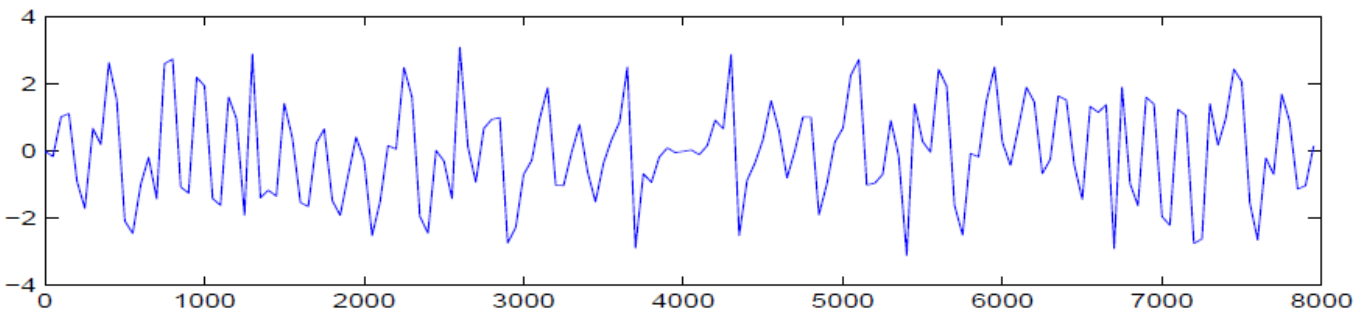
- Chceme frekvenčne analyzovať jeden rámeček, kde sa nachádza znelý úsek reči



- Po aplikovaní rýchlej fourierovej transformácie dostaneme:



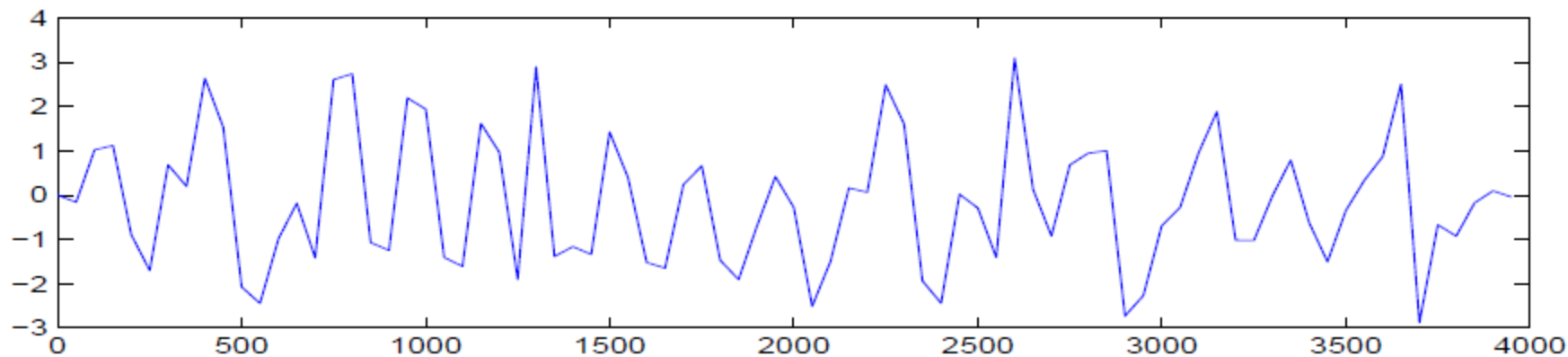
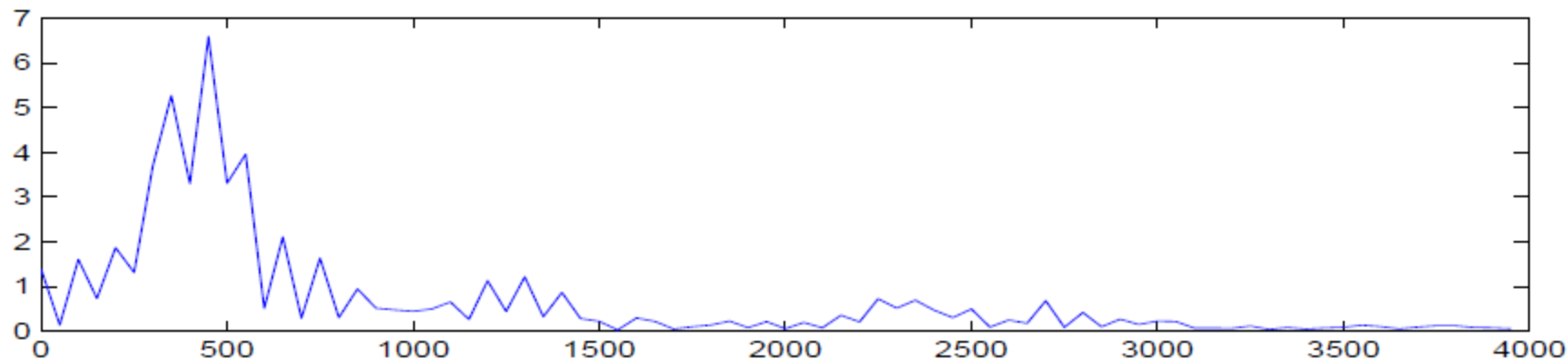
Amplitúda
spektra



Fáza
spektra

Príklad

- Horná polovica je symetrická so spodnou a nie je potrebné sa ňou zaoberať.



Frekvenčná analýza náhodných signálov

- Z hľadiska teórie sa rečové signály pokladajú za **náhodné**. Mali by sa teda frekvenčne analyzovať pomocou **spektrálnej hustoty výkonu** (power spectral density – PSD), ktorá je reálna a udáva rozdelenie výkonu vo frekvenčnej oblasti.

- Jeden z odhadov PSD využíva DFT:

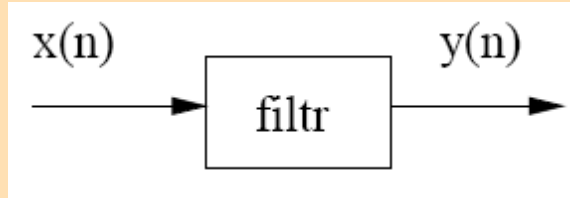
$$\hat{G}_{DFT}(k\Delta f) = \frac{1}{N} |X[k]|^2$$

- Jedná sa teda iba o abs. hodnotu modulu na druhú.
- Dynamika spektrálnej hustoty výkonu je väčšia ako u DFT (druhá mocnina..) a pri zobrazení nie je vidieť niektoré časti, preto sa častejšie používa zobrazenie v dB.



Lineárna filtrácia

Lineárna filtrácia

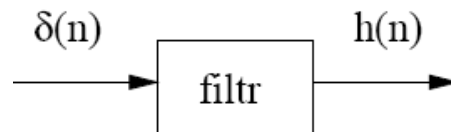


- **Lineárny filter** použijeme, ak potrebujeme nejako upraviť obsah frekvenčných zložiek v signále.
- Bežné filtre sú:
 - **lineárne** – zachovávajú lineárnu kombináciu:
 - Ak $x_1(n) \rightarrow y_1(n)$ a $x_2(n) \rightarrow y_2(n)$, potom $ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow ay_1(n) + by_2(n)$; $a, b \in \mathbb{R}$
 - **časovo invariantné** – správajú sa stále rovnako:
 - Ak $x(n) \rightarrow y(n)$, potom tiež $x(n-n_0) \rightarrow y(n-n_0)$, kde n_0 je ľubovoľný posun.
 - Niekedy však naopak chceme, aby sa charakteristiky filtra v čase menili - adaptívne systémy, rečové rámce (zmena každých 10ms)
 - **kauzálné** – filter „nevidí do budúcnosti“: $y(n) \sim y(m < n)$ a $x(m \leq n)$.

Impulzná odozva

- Alebo tiež *impulzná charakteristika* - $h(n)$
- je vrátená filtrom pri buzení Kroneckerovým alebo jednotkovým impulzom $\delta(n)$:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq 0 \\ 1 & \text{pro } n = 0 \end{cases}$$



- Ak poznáme **impulznú odozvu filtra $h(n)$** , vieme vypočítať ako bude filter reagovať na ľubovoľný vstupný signál. *Každá vstupná vzorka totiž „spustí“ jednu impulznú odozvu (vynásobenú veľkosťou vstupnej vzorky) a tie sa na výstupe zrátajú.*
- Môžeme teda zapísať konvolúciu:

$$y(n) = x(n) \star h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

Impulzná odozva

- O impulznej charakteristike môžeme povedať:
 - ak $h(k) = 0$ pre $\forall k < 0$, potom je filter **kauzálny**
 - impulzná odozva môže byť konečná – **FIR** (finite impulse response) alebo nekonečná – **IIR** (infinite impulse response).
 - jej Fourierov obraz vo frekvenčnej oblasti udáva **komplexná frekvenčná charakteristika filtra**:

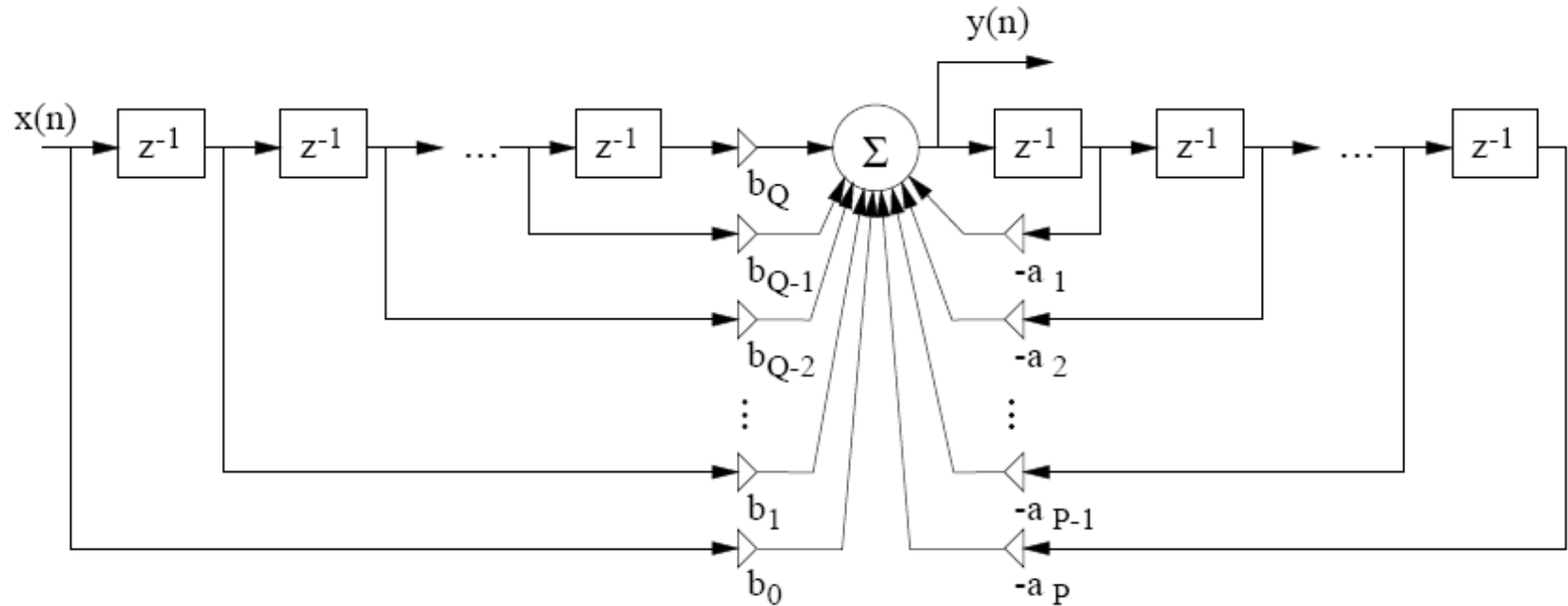
$$h(k) \rightarrow H(f)$$

- **Konvolúcií v časovej oblasti zodpovedá súčin vo frekvenčnej oblasti**, takže spektrum výsledného signálu je:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

- Myslíme na to, že pracujeme s diskretnými signálmi (aj impulzná odpoveď filtra je diskretná), všetko je teda vo frek. oblasti periodické a to s peridou T_s .

Ako vyzerá filter



Blok z^{-1} označuje oneskorenie o jednu vzorku.

Diferenčná rovnica filtra:

$$y(n) = \sum_{k=0}^Q b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^P a_k y(n-k),$$

Ako vyzerá filter

- Správanie sa filtra je možné zapísať *diferenčnou rovnicou*:

$$y(n) = \sum_{k=0}^Q b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^P a_k y(n-k),$$

- Kde $x(n-k)$ sú aktuálne a oneskorené vzorky vstupu a $y(n-k)$ sú oneskorené verzie výstupu.
- Typy filtrov:
 - FIR – nerekurzívny: iba $b_0 - b_Q$ sú nenulové. Je stabilný.
 - IIR – čisto rekurzívny: iba $b_0, a_1 \dots a_P$ sú nenulové
 - IIR – všeobecne rekurzívny: a_i aj b_i sú nenulové



Z-transformácia

z- transformácia

- Stretávame sa s ňou pri riešení diferenčných rovníc, pri hľadaní vlastností a realizácií systémov pracujúcich v diskretnom čase – DSP.
- **Konvertuje** *diskrétny signál v čase*, ktorý je sekvenciou reálnych a komplexných čísel *do komplexnej reprezentácie vo frekvenčnej oblasti*

z- transformácia

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

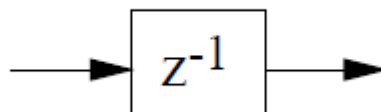
- Predpokladajme, že signál $x(n)$ má z-transformáciu $X(z)$. Definujeme poučku o oneskorení:
- Ak je $x(n) \rightarrow X(z)$, tak pre $y(n) = x(n - n_0)$ bude:

$$Y(z) = z^{-n_0} X(z)$$

- Pre oneskorenie o jednu vzorku platí:

$$x(n - 1) \rightarrow z^{-1} X(z)$$

- Preto označujeme oneskorenie o 1 vzorku:



Prenosová funkcia filtra

- Prepis diferenčnej rovnice pomocou z-transformácie:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^Q b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^P a_k Y(z) z^{-k}$$

- Prenosovú funkciu môžeme definovať ako podiel:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}} = \frac{z^{-Q} (b_0 z^Q + b_1 z^{Q-1} + \dots + b_Q)}{z^{-P} (z^P + a_1 z^{P-1} + \dots + a_P)} =$$

$$= b_0 \frac{z^{-Q} \prod_{k=1}^Q (z - n_k)}{z^{-P} \prod_{k=1}^P (z - p_k)} = b_0 z^{P-Q} \frac{\prod_{k=1}^Q (z - n_k)}{\prod_{k=1}^P (z - p_k)},$$

Prenosová funkcia filtra

- Prepis diferenčnej rovnice pomocou z-transformácie:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^Q b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^P a_k Y(z) z^{-k},$$

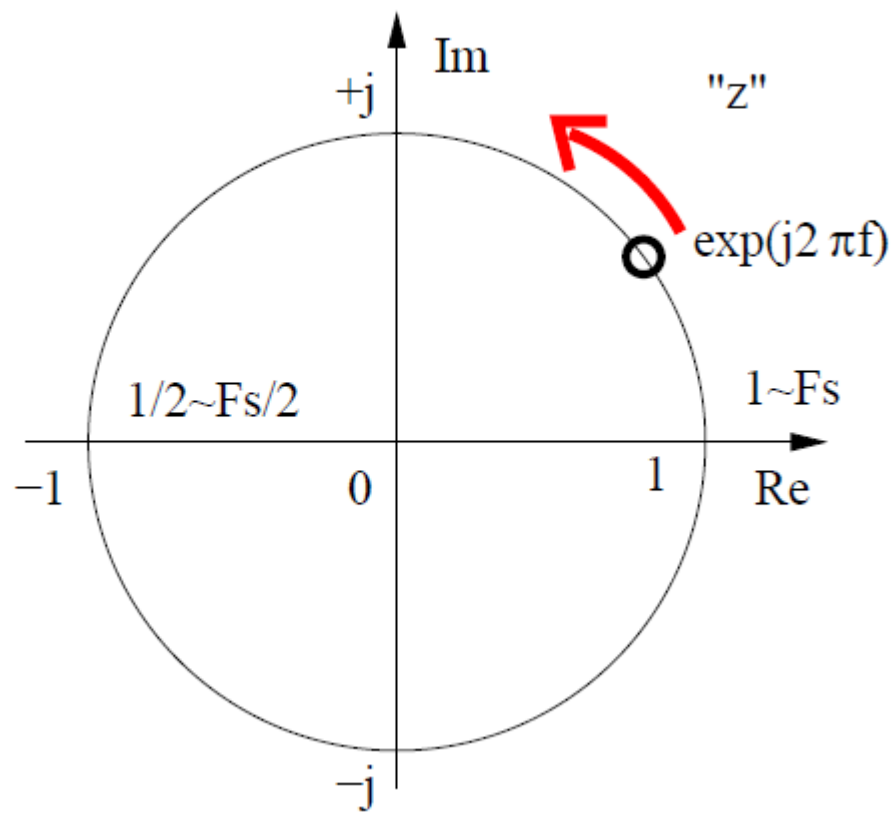
- Prenosovú funkciu môžeme definovať ako podiel:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

- kde $B(z)$ a $A(z)$ sú polynómy.
- Koeficient menovateľa a_0 musí byť vždy rovný „1“.

Frekvenčná charakteristika

- Frekv. charakteristika filtra od 0 po F_{vz} sa získa z prenosovej funkcie tak, že „obídeme“ jednotkovú kružnicu a budeme zaznamenávať komplexné hodnoty funkcie $H(z)$:
- pre normovanú frekvenciu: $H(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi f}}$
- pre „štandardnú“ frekvenciu: $H(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi fT}}$
- Pre každú hodnotu f vyčíslime polohu bodu na jednotkovej kružnici: $z = e^{j2\pi f}$
- Výsledkom bude komplexné číslo, pre ktoré vyčíslime podiel polynómov $B(z)$ a $A(z)$. Dostaneme tiež komplexné číslo.
- V matlabe za nás tento výpočet pre interval $(0 - F_{vz}/2)$ vykoná funkcia `freqz`.



Nuly a póly prenosovej funkcie

- Prenosovú funkciu $H(z)$ môžeme zapísať taktiež pomocou súčinu:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}} = \frac{z^{-Q} (b_0 z^Q + b_1 z^{Q-1} + \dots + b_Q)}{z^{-P} (z^P + a_1 z^{P-1} + \dots + a_P)} = \\ &= b_0 \frac{z^{-Q}}{z^{-P}} \frac{\prod_{k=1}^Q (z - n_k)}{\prod_{k=1}^P (z - p_k)} = b_0 z^{P-Q} \frac{\prod_{k=1}^Q (z - n_k)}{\prod_{k=1}^P (z - p_k)}, \end{aligned}$$

- Ak $a_k, b_k \in \mathfrak{R}$, potom póly p_k a nuly n_k môžu byť reálne, alebo vo dvojiciach komplexne združené.
- Z polôh pólov a núl sa dá približne určiť priebeh frekvenčnej charakteristiky $H(f)$.
- Stabilita filtra je zabezpečená, ak všetky póly ležia vo vnútri jednotkovej kružnice: $|p_k| < 1$

Prechod náhodného signálu filtrom

- Majme filter s komplexnou frekvenčnou charakteristikou $H(f)$.
- Pre vstupný signál so spektrálnou hustotou výkonu $G_x(f)$ je výstupná spektrálna hustota výkonu:

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

- Teda, vstupnú PSD násobíme druhou mocninou modulu komplexnej frekvenčnej charakteristiky.



Koniec

