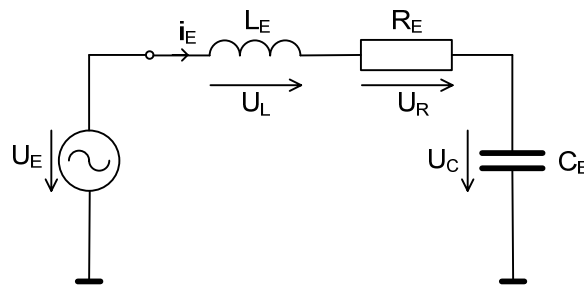


# Elektrické, mechanické a akustické rezonančné obvody

## Sériový elektrický a mechanický rezonančný obvod

### Elektrický sériový rezonančný obvod

Ak uvažujeme obvod, tvorený pasívnym dvojpólom RLC a zdrojom napätia, alebo prúdu, pri určitých hodnotách  $\omega$ ,  $L$  a  $C$  sa dvojpól chová ako obyčajný odpor, t.j. napätie na jeho svorkách je vo fáze s prúdom a zdroj dodáva do dvojpólu iba činný výkon. Tento pracovný režim dvojpólu nazývame rezonanciou a obvod, v ktorom k rezonancii dochádza, rezonančným obviom. Rezonanciu obvodu dosahujeme nastavovaním (ladením) jedného z prvkov  $L$  a  $C$ , alebo frekvencie zdroja.



Obr. 1 Sériový rezonančný obvod

Jednoduchý sériový rezonančný obvod je pasívny dvojpól, tvorený sériovým zapojením odporu  $R$  a reaktančných prvkov  $L$  a  $C$  (obr. 1). Jeho komplexná impedancia je:

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (1)$$

Pri rezonancii je

$$\text{Im}[\mathbf{Z}] = \omega L - \frac{1}{\omega_r C} = 0 \quad (2)$$

a impedancia dvojpólu je:

$$\mathbf{Z} = R$$

Túto podmienku možno dosiahnuť buď vyladením veľkosti jedného z reaktančných prvkov, alebo nastavením frekvencie zdroja. V oboch prípadoch však rezonancia nastane pri **rezonančnej frekvencii**, ktorú dostaneme z podmienky (2) (tzv. Thomsonov vzťah):

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ [rad/sec]} \quad \text{resp.} \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ [Hz]} \quad (3)$$

Vlastnosti rezonančného obvodu sú detailnejšie charakterizované amplitúdovými frekvenčnými charakteristikami napätí a prúdov v obvode (tzv. rezonančné krivky obvodu).

Ak predpokladáme na vstupe obvodu striedavý zdroj konštantného napätia  $U_0$ , obvodom preteká prúd

$$\mathbf{I} = \frac{U_0}{\mathbf{Z}} = \frac{U_0}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = I(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (4)$$

kde

$$I(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (5)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

sú amplitúdová a fázová charakteristika prúdu v sériovom rezonančnom obvode (obr.2), ktoré môžeme vyjadriť tiež v tvare:

$$I(\omega) = \frac{U_0}{R} \frac{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)^2 + (\Omega^2 - 1)^2}} = I_0 \frac{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)^2 + (\Omega^2 - 1)^2}} \quad (6)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{(\Omega^2 - 1)}{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)}$$

kde  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_r}$  je normovaná frekvencia a  $Q_E$  je činiteľ akosti rezonančného obvodu.

**Činiteľ akosti (kvality)** možno u sériového rezonančného obvodu vyjadriť ako pomer rezonančného napätia na cievke (resp. na kondenzátore) k rezonančnému napätiu dvojpoľu:

$$Q_E = \frac{U_L(\omega_r)}{U_r} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{U_C(\omega_r)}{U_r} = \frac{1}{\omega_r RC} \quad (7)$$

Vzťah (7) možno upraviť do tvaru:

$$Q_E = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} \quad (8)$$

kde

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

je tzv. **charakteristický odpor** rezonančného obvodu.

Napätie na prvkoch rezonančného obvodu:

$$U_R(\omega) = R \cdot I(\omega) = U_0 \frac{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)^2 + (\Omega^2 - 1)^2}} \quad (10a)$$

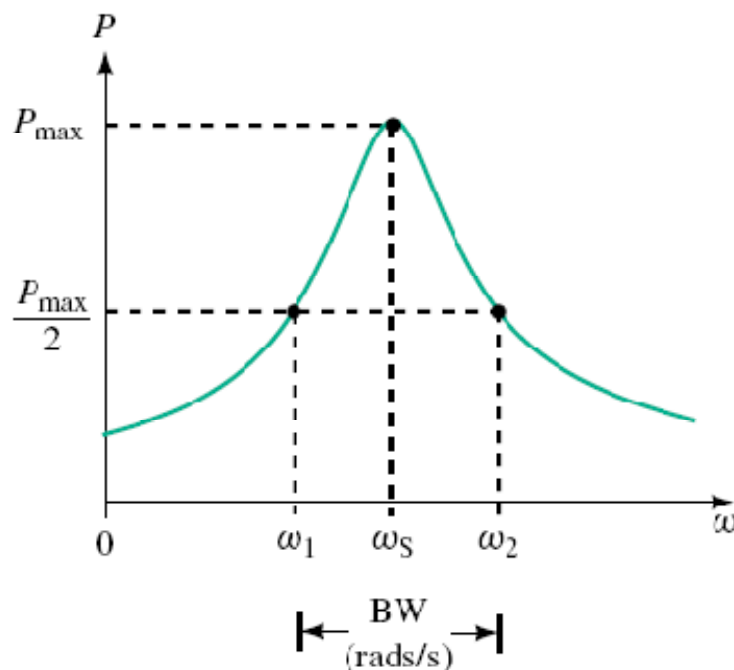
$$U_L(\omega) = \omega L \cdot I(\omega) = U_0 \frac{\Omega^2}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)^2 + (\Omega^2 - 1)^2}} \quad (10b)$$

$$U_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} I(\omega) = U_0 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)^2 + (\Omega^2 - 1)^2}} \quad (10c)$$

Výkon spotrebovaný sériovým rezonančným obvodom je:

$$P = [I(\omega)]^2 \cdot R = \left[ \frac{U_0}{R} \frac{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)^2 + (\Omega^2 - 1)^2}} \right]^2 \cdot R = \frac{U_0^2}{R} \frac{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)^2}{\left(\frac{\Omega}{Q_E}\right)^2 + (\Omega^2 - 1)^2}$$

Výkonová frekvenčná charakteristika rezonančného obvodu je tzv. krivka selektivity (viď. Obr.).



Obr. 2 Krivka selektivity rezonančného obvodu

Definujeme šírku pásma rezonančného (bandwidth, BW) obvodu ako rozdiel medzi frekvenciami, pri ktorých je na rezonančnom obvode polovičný výkon. Platí:

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_r}{Q_E} \quad [\text{rad/sek}]$$

$$BW = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q_E} \quad [\text{Hz}]$$

## Úloha

Analyzujte vlastnosti elektrického sériového rezonančného obvodu pomocou programu AkAbak. Postupujte nasledovne:

1. Nakreslite schému sériového rezonančného obvodu a očísľujte uzly obvodu
2. Zvoľte hodnoty prvkov tak, aby ste dosiahli definovanú rezonančnú frekvenciu  $f_r = 100 \text{ Hz}$  a kvalitu rezonančného obvodu  $Q_E = 1/\sqrt{2}$
3. Napíšte skript s hlavičkou podľa obr. 3
4. Vykonať simuláciu obvodu a analyzujte napätia na jednotlivých prvkoch a prúd v obvode. Zamerajte sa na preskúmanie:
  - vplyvu jednotlivých prvkov (R,L,C) na veľkosť rezonančnej frekvencie a činiteľa kvality obvodu a zodpovedajúcu zmenu frekvenčných charakteristík obvodu (napätia, prúd)
  - rozdiel medzi použitím lineárnej a nelineárnej škály na zvislej osi
5. Vypočítajte šírku pásma rezonančného obvodu a porovnajte vypočítaný výsledok s šírkou pásma, odčítanou na krivke selektivity

```

|*****|
|***   Elektroakustika - cvicenie 3. tyzden   ***|
|***   Seriovy elektricky a mechanicky rezonancny obvod ***|
|***           Meno a priezvisko, osobne cislo           ***|
|*****|

System 'S1'

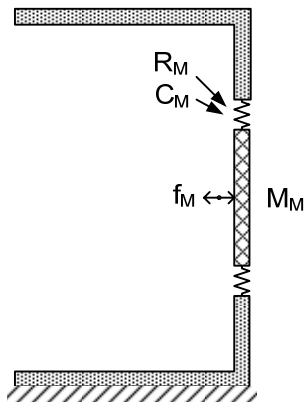
Resistor   'R1'  Node=1=2  R=1ohm

```

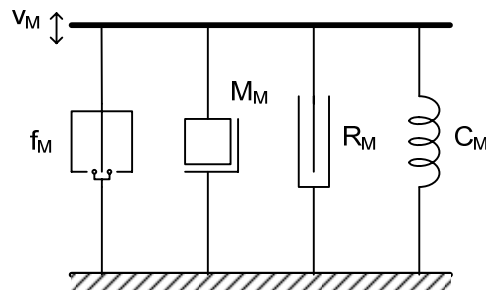
Obr. 3 Hlavička skriptu

## **Mechanický sériový rezonančný obvod.**

Jednou zo základných *mechanických* štruktúr, ktorá sa uplatňuje v elektroakustike je pružne upevnený kmitajúci piest, ktorý reprezentuje kmitajúcu membránu (obr. 4). V takejto mechanickej sústave uvažujeme hmotnosť membrány (piesta), pružnosť (poddajnosť) upevnenia membrány (na okrajoch) a odpor trenia, ktorý vzniká pri kmitaní sústavy. Symbolická schéma sústavy (obr. 5) naznačuje, že prvky sústavy sú zapojené na spoločnú rýchlosť, t. j. tvoria sériový mechanický rezonančný obvod.

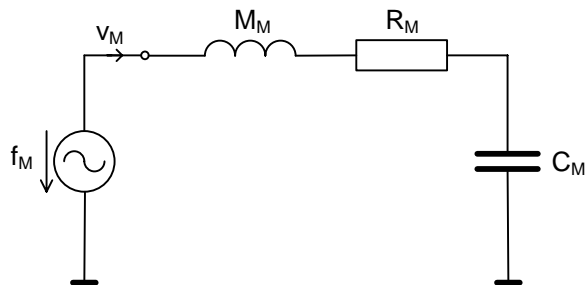


Obr. 4



Obr. 5

Ak predpokladáme, že prvky sústavy sú rozkmitané zdrojom konštantnej sily, analogická schéma obvodu sústavy bude ako na Obr. 6.



Obr. 6 Analogická schéma sériového rezonančného obvodu

Vychádzajúc z pravidiel, ktoré platia pre analogické schémy mechanických sústav, môžeme celkovú mechanickú rýchlosť „tečúcu“ v obvode vyjadriť v tvare:

$$v_M = \frac{f_M}{R_M + j\omega M_M + \frac{1}{j\omega C_M}}$$

Odkiaľ impedanciu obvodu vyjadriť v tvare:

$$\mathbf{Z}_M = \frac{f_M}{v_M} = R_M + j\omega M_M + \frac{1}{j\omega C_M} = R_M + j\left(\omega M_M - \frac{1}{\omega C_M}\right)$$

Podobne ako v prípade elektrického sériového rezonančného obvodu, aj v tomto prípade môžeme identifikovať rezonančnú frekvenciu ako frekvenciu, pri ktorej je reaktančná časť mechanickej impedancie nulová, t.j.:

$$\omega_r M_M - \frac{1}{\omega_r C_M} = 0 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{M_M C_M}} \text{ [rad/s]} \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{M_M C_M}} \text{ [Hz]}$$

Mechanické sily na prvkoch mechanickej sústavy:

$$f_{M,R} = v_M \cdot R_M = \frac{f_M}{R_M + j\omega M_M + \frac{1}{j\omega C_M}} \cdot R_M$$

$$f_{M,M} = v_M \cdot j\omega M_M = \frac{f_M}{R_M + j\omega M_M + \frac{1}{j\omega C_M}} \cdot j\omega M_M$$

$$f_{M,C} = v_M \cdot \frac{1}{j\omega C_M} = \frac{f_M}{R_M + j\omega M_M + \frac{1}{j\omega C_M}} \cdot \frac{1}{j\omega C_M}$$

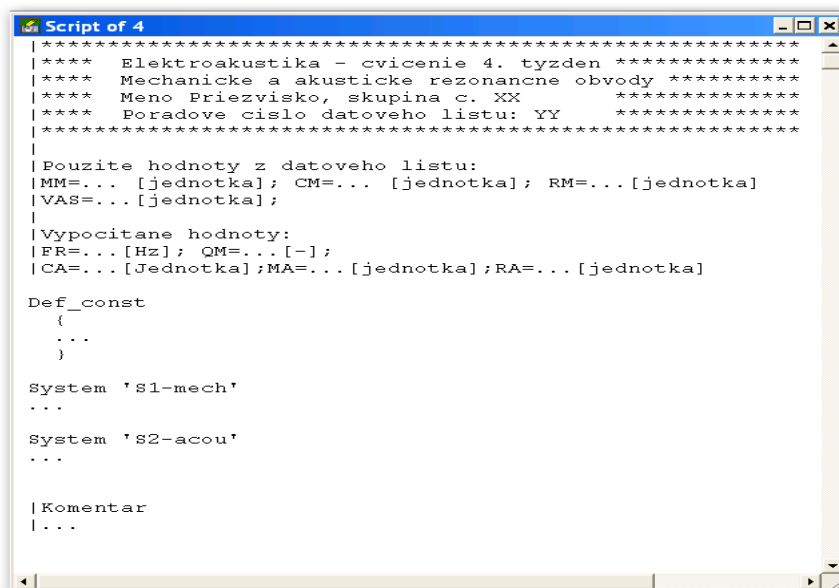
Mechanický činiteľ kvality:

$$Q_M = \left. \frac{f_{M,M}}{f_{M,R}} \right|_{(\omega=\omega_r)} = \frac{\omega_r M_M}{R_M} = \left. \frac{f_{M,C}}{f_{M,R}} \right|_{(\omega=\omega_r)} = \frac{1}{\omega_r R_M C_M}$$

## Úloha

Analyzujte vlastnosti mechanického sériového rezonančného obvodu pomocou programu AkAbak. Postupujte nasledovne:

1. Na ftp serveri  
<[ftp://kemt.fei.tuke.sk/KEMT320\\_EA/materialy/2009/cvicenia/21\\_e0046\\_w26fx002\\_datasheet.pdf](ftp://kemt.fei.tuke.sk/KEMT320_EA/materialy/2009/cvicenia/21_e0046_w26fx002_datasheet.pdf)> nájdete dátový list reproduktora, ktorý použijete na cvičení.
2. Nakreslite si **analogickú** schému obvodu. Ako hodnoty prvkov použite hodnoty „Moving Mass“, „Suspension Mechanical Resistance“ a „Suspension Compliance,“ z dátového listu reproduktora.
3. Na základe analógie medzi elektrickým a mechanickým obvodom rovnakého typu napíšte vzťah pre celkovú mechanickú impedanciu obvodu, mechanickú rezonančnú frekvenciu a mechanický činiteľ kvality obvodu a vypočítajte hodnoty týchto parametrov.
4. Napíšte skript na simuláciu obvodu pomocou programu AkAbak podľa vzoru na Obr. 7, zobrazte si priebehy mechanických síl na prvkoch sústavy a konfrontujte vypočítané hodnoty rezonančnej frekvencie a činiteľa kvality s tvarom zobrazených charakteristík.



```

Script of 4
*****
**** Elektroakustika - cvicenie 4. tyzden ****
**** Mechanicke a akusticke rezonancne obvody ****
**** Meno Priezvisko, skupina c. XX ****
**** Poradove cislo datoveho listu: YY ****
*****

| Pouzite hodnoty z datoveho listu:
| MM=... [jednotka]; CM=... [jednotka]; RM=... [jednotka]
| VAS=... [jednotka];
|
| Vypocitane hodnoty:
| FR=... [Hz]; QM=... [-];
| CA=... [Jednotka]; MA=... [jednotka]; RA=... [jednotka]

Def_const
{
...
}

System 's1-mech'
...

System 's2-acou'
...

| Komentar
| ...

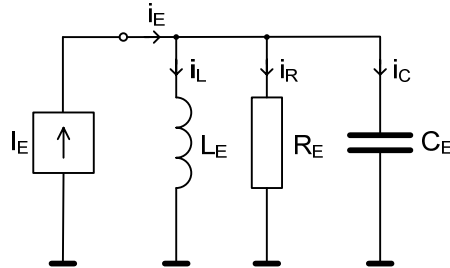
```

Obr. 6 Hlavička skriptu na simuláciu mechanického rezonančného obvodu

# Paralelný elektrický a akustický rezonančný obvod

## Elektrický paralelný rezonančný obvod

Jednoduchý paralelný rezonančný obvod je pasívny dvojpól, tvorený paralelným zapojením odporu  $R_E$  a reaktančných prvkov  $L_E$  a  $C_E$ . Je znázornený na obr. 1.



Obr. 1 Paralelný rezonančný obvod

Vlastnosti paralelného RLC rezonančného obvodu sú podobné vlastnostiam sériového RLC rezonančného obvodu, takže ich môžeme opísať stručnejšie.

Komplexná admitancia paralelného rezonančného obvodu je:

$$Y_E = \frac{1}{R_E} + j\omega C_E + \frac{1}{j\omega L_E} = \frac{1}{R_E} + j\left(\omega C_E - \frac{1}{\omega L_E}\right) \quad (1)$$

Pri rezonancii je

$$\text{Im}[Y_E] = \omega_r C_E - \frac{1}{\omega_r L_E} = 0 \quad (2)$$

a admitancia dvojpólu je:

$$Y_E = \frac{1}{R_E}$$

Rezonancia nastane pri **rezonančnej frekvencii**, ktorú dostaneme z podmienky (2) (tzv. Thomsonov vzťah):

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_E C_E}} \text{ [rad/sec]} \quad \text{resp.} \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_E C_E}} \text{ [Hz]} \quad (3)$$

Ak predpokladáme na vstupe obvodu striedavý prúdový zdroj  $I_E(\omega) = I_0 e^{j\omega t}$ , jednotlivými prvkami obvodu budú tiecť prúdy:

$$I_C(\omega) = I_E(\omega) \frac{R_E \cdot j\omega L_E}{R_E \cdot \frac{1}{j\omega C_E} + R_E \cdot j\omega L_E + \frac{1}{j\omega C_E} \cdot j\omega L_E} \quad (4a)$$

$$I_L(\omega) = I_E(\omega) \frac{R_E \cdot \frac{1}{j\omega C_E}}{R_E \cdot \frac{1}{j\omega C_E} + R_E \cdot j\omega L_E + \frac{1}{j\omega C_E} \cdot j\omega L_E} \quad (4b)$$

$$I_R(\omega) = I_E(\omega) \frac{j\omega L_E \cdot \frac{1}{j\omega C_E}}{R_E \cdot \frac{1}{j\omega C_E} + R_E \cdot j\omega L_E + \frac{1}{j\omega C_E} \cdot j\omega L_E} \quad (4c)$$

Napätie na prvkoch rezonančného obvodu:

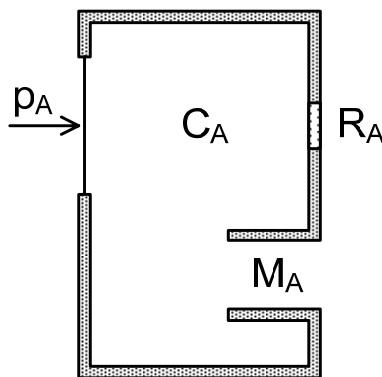
$$U_R = I_R(\omega) \cdot R_E = U_L = I_L(\omega) \cdot j\omega L_E = U_C = I_C(\omega) \cdot \frac{1}{j\omega C_E} = I_E(\omega) \frac{R_E \cdot j\omega L_E \cdot \frac{1}{j\omega C_E}}{R_E \cdot \frac{1}{j\omega C_E} + R_E \cdot j\omega L_E + \frac{1}{j\omega C_E} \cdot j\omega L_E} \quad (5)$$

Činiteľ akosti u paralelného RLC obvodu určíme ako pomer rezonančného prúdu, prechádzajúceho cievkou (resp. kondenzátorom) k rezonančnému prúdu dvojpoľu:

$$Q_E = \frac{I_L(\omega_r)}{I_R(\omega_r)} = \frac{R_E}{\omega_r L_E} = \frac{I_C(\omega_r)}{I_R(\omega_r)} = \omega_r R_E C_E = R_E \sqrt{\frac{C_E}{L_E}} \quad (6)$$

### Akustický paralelný rezonančný obvod

Jednou zo základných *akustických* štruktúr, s ktorými sa možno stretnúť v elektroakustike, je tzv. *Helmholtzov rezonátor*, tvorený dutinou a akustickou trubicou. Jedna z verzií Helmholtzovho rezonátora je na obr. 3. Ide o skrinku, do ktorej akustická vlna vstupuje cez kruhový otvor plochy  $S$  a postupuje ďalej (do priestoru) cez dutinu, akustickú trubicu a (možné) netesnosti, reprezentované na obr. 3 naznačenou štrbinou. Dutina skrinky tvorí akustickú poddajnosť, trubica tvorí akustickú hmotnosť a štrbina v stene skrinky je reprezentovaná akustickým odporom. Vychádzajúc z delenia akustickej objemovej rýchlosti, vstupujúcej do sústavy na objemovú rýchlosť „vstrebajú“ dutinou a objemové rýchlosti „vytekajúce“ akustickou trubicou a štrbinou, sú prvky sústavy zapojené v analogickej schéme paralelne.



Obr. 3 Helmholtzov rezonátor ako akustický paralelný rezonančný obvod



## Úloha

- a) Do zošita si nakreslite analogickú schému obvodu.
- b) Na základe analógie medzi elektrickým a akustickým obvodom rovnakého typu napíšte vzťahy pre:
  - celkovú akustickú impedanciu akustického obvodu,
  - rezonančnú frekvenciu akustického obvodu
  - činiteľ kvality akustického obvodu.
- c) vypočítajte hodnoty prvkov akustického obvodu ( $M_A$ ,  $C_A$ ,  $R_A$ ) tak, aby bol akustický rezonátor naladený na frekvenciu 100 Hz, aby činiteľ kvality akustického obvodu bol  $Q_A=7$  a aby akustická poddajnosť zodpovedala objemu  $V_{AS}$  (viď dátový list reproduktora);
- d) napíšte skript na simuláciu obvodu v programe AkAbak
  - ako hodnoty prvkov použite hodnoty vypočítané v predchádzajúcom kroku
  - zdroj koštantnej objemovej rýchlosti vytvorte pomocou prvku „gyrator“ s prevodovou konštantou  $Bl=1Tm$
- e) zobrazte si priebehy (frekvenčné charakteristiky) vstupnej akustickej impedancie a akustických objemových rýchlostí na prvkoch sústavy a konfrontujte očakávané hodnoty rezonančnej frekvencie a činiteľa kvality s tvarom zobrazených charakteristík.