

2. ZÁKLADY TEÓRIE ANTÉN

2.1 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE VŠEOBECNÝCH ZDROJOV

Základnou úlohou, ktorú je potrebné riešiť pre popísanie vlastnosti antén, je tzv. vonkajšia úloha elektrodynamiky, t.j. výpočet elektromagnetického poľa vo voľnom priestore, vytvoreného ľubovoľnými zdrojmi (voľnými nábojmi a prúdmi), rozloženými v ohraničenom objeme V . Riešenie tejto úlohy vedie na nehomogénne vlnové rovnice pre vektory \vec{E} a \vec{H} . Vzhľadom na komplikovaný tvar pravých strán (zdrojových funkcií) týchto rovníc sa ukázalo ako výhodné použiť pomocné funkcie – skalárny a vektorový potenciál. Vlnové rovnice majú potom tvar

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.1)$$

$$\Delta \psi + k^2 \psi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.2)$$

kde \vec{A} je vektorový a ψ skalárny potenciál, \vec{J} – hustota vodivého prúdu a ρ – hustota voľného náboja.

Pre harmonicky premenné pole možno skalárny potenciál vyjadriť Lorentzovou kalibračnou podmienkou

$$\psi = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} \operatorname{div} \vec{A} \quad (2.3)$$

a pre fázory intenzity elektrického a magnetického poľa platia vzťahy

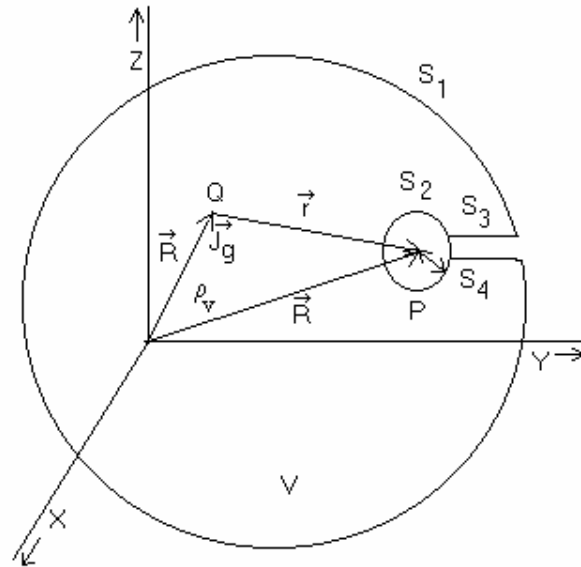
$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -j\omega \vec{A} - \frac{j}{\omega\varepsilon\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Vlnovú rovnicu (2.1) možno v kartézskej súradnicovej sústave riešiť po zložkách

$$\Delta A_i + k^2 A_i = -\mu J_i \quad (2.5)$$

kde $i = x, y, z$.

Vlnová rovnica(2.5) je nehomogénnou parciálnou diferenciálnou rovnicou, ktorej riešenie sa skladá z riešenia homogénnej rovnice a partikulárneho integrálu nehomogénnej rovnice. Určíme tento partikulárny integrál. Nech zdroje elektromagnetického poľa , J sú sústredné v okolí začiatku súradnicovej sústavy(obr.2.1). Všeobecný bod zdrojovej oblasti označíme Q a jeho polohy vektor \vec{R} . Bod , v ktorom hľadáme hodnotu vektorového potenciálu A_i , označíme P a jeho polohový vektor \vec{R} . Partikulárny integrál rovnice (2.5) skonštruujeme tak ,že využijeme 2. Greenovu vetu pre skalárne funkcie A_i a φ , kde



Obr. 2.1 Geometria odvodenia partikulárneho integrálu vlnovej rovnice

$$\varphi = \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.6)$$

je riešením homogénnej rovnice v guľovej súradnicovej sústave. Platí

$$\int_V \{A_i \Delta \varphi - \varphi \Delta A_i\} dV = \oint_S \{A_i \text{grad} \varphi - \varphi \text{grad} A_i\} dS \quad (2.7)$$

a po dosadení za ΔA zo vzťahu (2.5) a za φ zo vzťahu (2.6) po úprave dostaneme

$$\mu \int_V J_i \frac{e^{-jkr}}{r} dV = \oint_S \left\{ A_i \text{grad} \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r} \text{grad} A_i \right\} dS \quad (2.8)$$

Integrály v rovnici (2.8) majú singularitu pre $r \rightarrow 0$, t.j. keď sa bod Q blíži k bodu pozorovania P. Bod pozorovania je preto nutné vylúčiť z oblasti integrácie. To možno uskutočniť tak, že bod P obklopíme malou guľovou plochou S_2 s nenulovým polomerom $r = a$, ktorú spojíme plochou S_3 s plochou S_1 tak, že vznikne uzavretá plocha S , ktorá neobsahuje bod P. plošný integrál na pravej strane rovnice(2.8) je potom daný súčtom integrálov cez čiastkové plochy S_1 , S_2 a S_3 . Integrál cez plochu S_3 konverguje k nule pre $a \rightarrow 0$. Vzhľadom na to, že platí

$$\text{grad} \frac{e^{-jkr}}{r} \Big|_{r=a} = - \left(jk + \frac{1}{a} \right) \frac{e^{-jka}}{a} \vec{r}_0 \quad (2.9)$$

možno vypočítať limitu

$$\lim_{a \rightarrow 0} \oint_{S_2} \left\{ A_i \text{grad} \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r} \text{grad} A_i \right\} dS = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{S_2} \left\{ \left(-jk - \frac{1}{a} \right) \frac{e^{-jka}}{a} \right\} a^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi = \int_{S_2} A_i \sin \Theta d\Theta d\Phi = 4\pi A_i(P) \quad (2.10)$$

kde $A_i(P)$ je stredná hodnota A_i na povrchu gule okolo bodu P. Keď rozšírime oblasť V do nekonečna, príspevok cez plochu S_1 možno zanedbať a pre partikulárny integrál rovnice(2.5) dostávame vzťah

$$A_i = \frac{\mu}{4\pi} \int_V J_i \frac{e^{-jkr}}{r} dV \quad (2.11)$$

preto možno napísať aj partikulárny integrál rovnice(2.1) v tvare

$$A_i = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J} \frac{e^{-jkr}}{r} dV \quad (2.12)$$

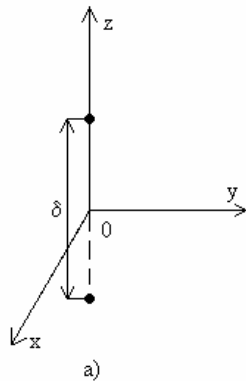
Vektorový potenciál v bode je teda daný superpozíciou príspevkov od elementárnych zdrojov $\vec{J} dV$ v jednotlivých bodoch Q. Elementárna vlna, zodpovedajúca určitému príspevku, sa šíri ako uniformná guľová vlna zo zdrojového bodu Q do miesta pozorovania P. Veľkosť tohoto príspevku závisí od veľkosti zdrojovej funkcie \vec{J} v bode Q a od vzdialenosti r medzi bodmi Q a P. Sčítanie príspevkov je nutné robiť v časovej aj priestorovej oblasti, pretože vektorová funkcia \vec{J} môže mať vo všeobecnosti v každom zdrojovom bode iný smer.

2.2. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE ELEMENTÁRNYCH ZDROJOV

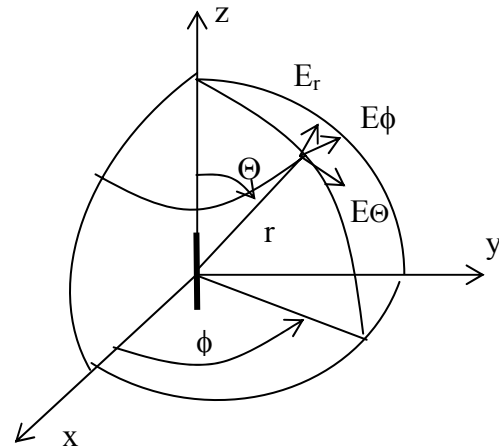
Pri analýze zdrojov elektromagnetického poľa všeobecných zdrojov je výhodné poznať elektromagnetické pole niektorých jednoduchých (elementárnych) zdrojov. Tieto elementárne zdroje v praxi nemusia byť (a ani nie sú) realizovateľné, ale umožňujú analyzovať elektromagnetické pole zložitejších (reálnych) antén. Okrem toho slúžia ako názorný model pri kvalitatívnej analýze vyžarovaných elektromagnetických vln. Ako vyplýva z kapitoly 2.1, zložky elektromagnetického poľa vieme vypočítať, ak poznáme rozloženie amplitúdy a fázy prúdu v priestore. Elementárne zdroje elektromagnetických vln sú žiariče s diferenciálnymi rozmermi, v ktorých rozloženie nábojov, prúdov alebo tangenciálnych zložiek elektromagnetického poľa je definične určené ako konštantne: to znamená, že amplitúdy a fázy uvedených veličín sú v každom bode elementárneho žiariča rovnaké. Ľubovoľnú skutočnú anténu možno považovať za súbor elementárnych zdrojov.

2.2.1.ELEMENTÁRNY ELEKTRICKÝ DIPÓL

Elementárny elektrický dipól je vytvorený dvoma bodovými nábojmi $+q$ a $-q$, umiestnenými vo veľmi malej vzájomnej vzdialenosti δ , ktoré sa v čase harmonicky (obr.2.2a). tento dipól je ekvivalentný elementu elektrického prúdu $I = j\omega q$. Fyzikálny model elementárneho elektrického dipólu si možno predstaviť ako lineárnu vodičovú anténu napájanú v strede, ktorej dĺžka je omnoho menšia ako vlnová dĺžka, pričom konce antény majú veľmi veľkú kapacitu (Hertzov dipól, obr.2.2b). Prúd tečúci v takej anténe má vo všetkých jej bodoch rovnakú veľkosť.



Obr. 2.2. Elementárny elektrický dipól:
a) matematický model, b) Hertzov dipól
($l \ll \lambda$)



Obr.2.3.Pole elementárneho dipólu

Nech elementárny elektrický dipól je umiestnený v smere osi z v začiatku súradnicovej sústavy (obr.2.3). Elektrický dipólový moment je daný vzťahom

$$\vec{p} = q \delta = \frac{I dz}{j\omega} z_0 \quad (2.13)$$

kde z je jednotkový vektor v smere osi z. Po dosadení zo vzťahu (2.13) do (2.12) možno vyjadriť vektorový potenciál

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu I dz}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} z_0 \quad (2.14)$$

kde predpokladáme, že vzhľadom na veľkú vzdialenosť bodu pozorovania P od začiatku súradnicovej sústavy platí $R \approx r$.

Zo známeho vektorového potenciálu (2.14) možno pomocou vzťahov (2.4) vypočítať zložky intenzity elektrického a magnetického poľa

$$E_r = \frac{\omega\mu Idz}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right] \cos \Theta \quad (2.15)$$

$$E_\Theta = \frac{j\omega\mu Idz}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 - \frac{j}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin \Theta \quad (2.16)$$

$$H_\Phi = \frac{jk Idz}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 - \frac{j}{kr} \right] \sin \Theta \quad (2.17)$$

$$E_\Phi = H_\Theta = H_r = 0 \quad (2.18)$$

Vzhľadom na symetriu úlohy pole elementárneho elektrického dipólu nezávisí od súradnice Φ . Význam jednotlivých členov vo vzťahoch (2.15) až (2.17) závisí od veľkosti kr , t.j. od pomeru vlnovej dĺžky a vzdialenosti bodu pozorovania P – od $2\pi r/\lambda$. Možno rozlíšiť tri oblasti(zóny):

1. Blízka zóna (statická), pre ktorú platí $2\pi r \ll \lambda$. V hranatých zátvorkách prevažujú posledné členy, takže ostatné možno zanedbať. Vzťahy (2.15) a (2.16) sa redukujú v tejto zóne na vzťahy pre elektrostatické pole elektrického dipólu a vzťah (2.17) predstavuje pole elementu prúdu v kvázistacionárnom prípade.

2. Stredná zóna, v ktorej $2\pi r$ je porovnateľné s vlnovou dĺžkou λ . Pole ma zložitú štruktúru – vzťahy (2.15) až (2.18) nemožno zjednodušiť.

3. Vzdialená zóna (žiarivá), v ktorej $2\pi r \gg \lambda$. Významné sú len členy obsahujúce činiteľ $1/r$. Vzťahy (2.15) až (2.18) možno zjednodušiť na tvar

$$E_\Theta = \frac{j\omega\mu Idz \sin \Theta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.19)$$

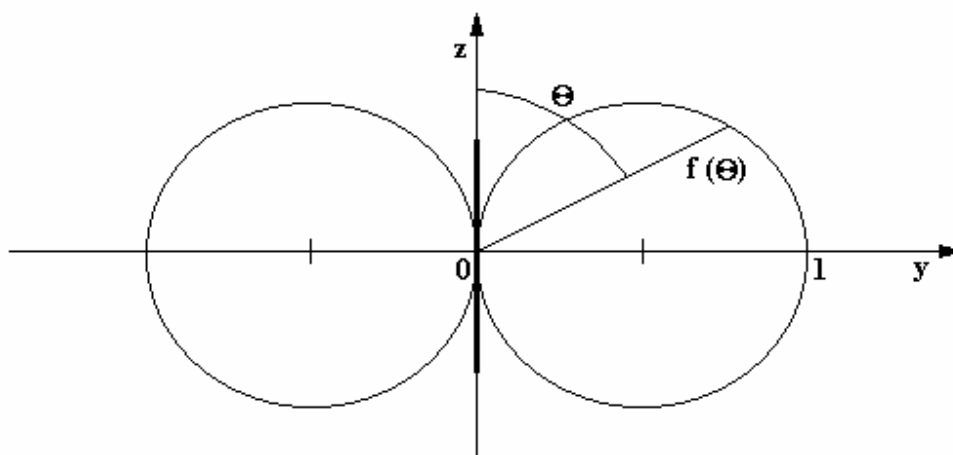
$$H_\Phi = \frac{jk Idz \sin \Theta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.20)$$

$$E_r = E_\Phi = H_r = H_\Theta = 0 \quad (2.21)$$

Pole má veľmi jednoduchú štruktúru. Vektory intenzity elektrického a magnetického poľa sú navzájom kolmé a zároveň sú kolmé na smer šírenia sa vlny.

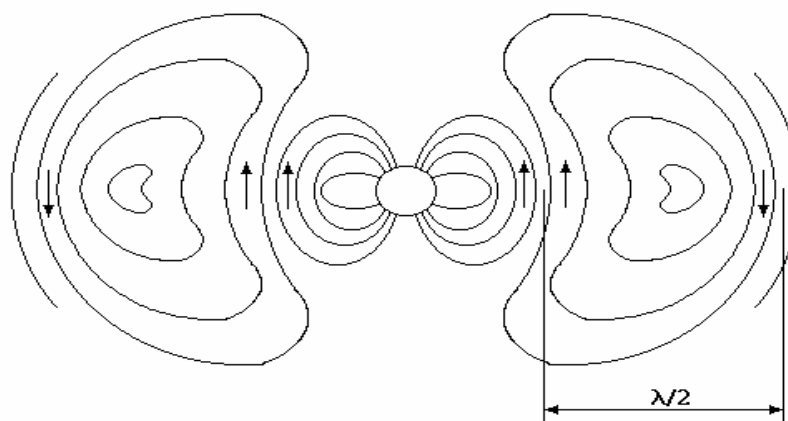
Smerovú charakteristiku elementárneho elektrického dipólu možno vyjadriť vzťahom

$$F(\Theta, \Phi) = \sin \Theta \quad (2.22)$$



Obr. 2. 4. Rez smerovou charakteristikou elementárneho elektrického dipólu v rovine \vec{E}

Na obr.2.4 je znázornený rez smerovou charakteristikou v rovine E a na obr.2.5 sú siločiarly elektrického poľa



Obr. 2. 5. Elektrické siločiarv v okolí elementárneho elektrického dipólu

Ak dosadíme vzťah (2.22) do vzťahu (1.7) , môžeme vypočítať smerovosť elementárneho elektrického dipólu

$$D = \frac{2}{3} = 1,76 \quad (2.23)$$

2.2.2.ELEMENTÁRNY MAGNETICKÝ DIPÓL

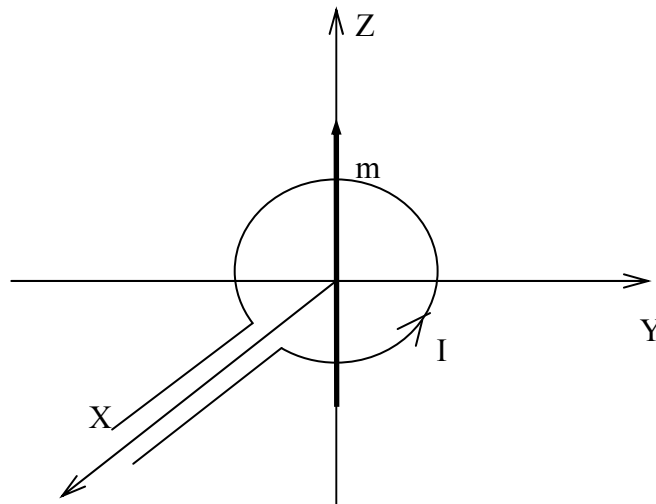
Za elementárny magnetický dipól možno považovať element magnetického prúdu

$I_m = -j\omega q_m$, kde q_m je magnetický náboj. Medzi hustotou elektrického prúdu \vec{J} a hustotou magnetického prúdu \vec{J}_m platia nasledujúce vzťahy[11]

$$\vec{J} = \frac{1}{j\omega\mu} \text{rot } \vec{J}_m \quad (2.24)$$

$$\vec{J}_m = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot } \vec{J} \quad (2.25)$$

Ako vyplýva zo vzťahu (2.25), element magnetického prúdu je ekvivalentný nekonečne malému víru elektrického prúdu. Fyzikálne možno realizovať elementárny magnetický dipól v tvare slučky s prúdom, ktorej rozmery sú malé v porovnaní s vlnovou dĺžkou λ (obr.2.6).



Obr. 2.6. Elementárna prúdová slučka

Pole elementárneho magnetického dipólu je duálne k poľu elementárneho elektrického dipólu. Vzhľadom na to, že Maxwellove rovnice sú invariantné voči transformácií

$$\vec{E} \leftarrow \vec{H}, \quad \varepsilon \leftarrow \mu, \quad \vec{J} \leftarrow -\vec{J}_m \quad (2.26)$$

možno elektromagnetické pole elementárneho magnetického dipólu vyjadriť využitím vzťahov (2.15) až (2.18) v tvare

$$E_\Phi = -\frac{jkI_m dz}{4\pi r} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 - \frac{j}{kr} \right] \sin \Theta \quad (2.27)$$

$$H_r = \frac{\omega\varepsilon I_m dz}{4\pi r} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\frac{1}{kr} - \frac{j}{(kr)^2} \right] \cos \Theta \quad (2.28)$$

$$H_{\Theta} = -\frac{j\omega\epsilon I_m dz}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[1 - \frac{j}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] \sin \Theta \quad (2.29)$$

$$E_r = E_{\Theta} = H_{\Phi} = 0 \quad (2.30)$$

Podobne ako v prípade elektrického elementárneho dipólu, pole magnetického dipólu nezávisí od súradnice Φ . Smerová charakteristika oboch dipólov je rovnaká, rovnaká je teda aj ich smerovosť. Pre praktické výpočty je často výhodné nahradiť vo vzťahoch (2.27) až (2.29) magnetický prúd (ktorý reálne neexistuje) ekvivalentným elektrickým prúdom pomocou vzťahu pre magnetický dipólový moment prúdovej slučky

$$\vec{m} = \mu I S \vec{n}_0 \quad (2.31)$$

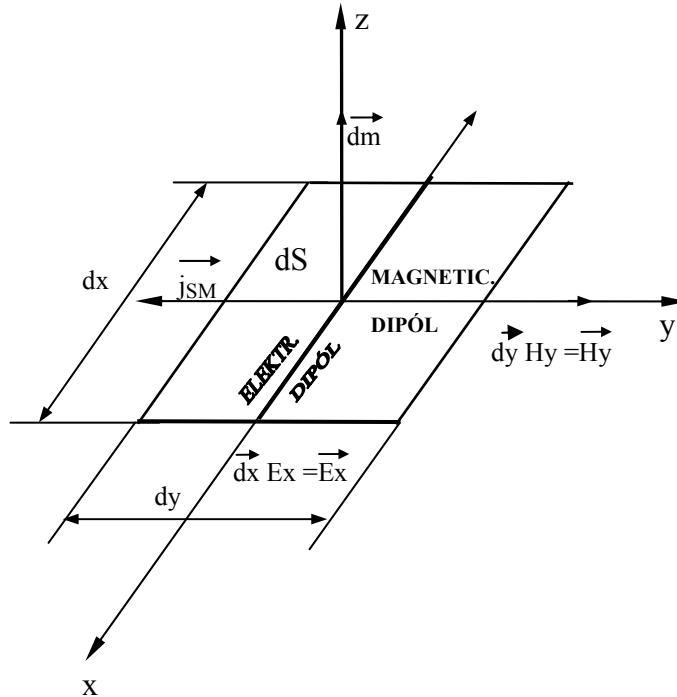
kde S je plocha slučky a \vec{n}_0 normálový vektor k tejto ploche. Ak prúdová slučka má polomer a , potom vo vzťahoch (2.27) až (2.29) možno nahradiť súčin $I_m dz$ súčinom $\pi I k a^2$.

2.2.3.ELEMENTÁRNA APERTÚRA

Elementárnou apertúrou (elementom vlnoplochy, Huygensovým elementom) budeme nazývať elementárnu vlnoplochu dS postupujúcej elektromagnetickej vlny, ktorej rozmery sú omnoho menšie ako vlnová dĺžka λ tejto vlny. Element vlnoplochy možno považovať za rovinný a v jeho vnútri sú dotyčnicové zložky vektorov intenzít elektrického a magnetického poľa \vec{E}_t a \vec{H}_t konštantné, pričom medzi nimi platí vzťah

$$\vec{H}_t = \frac{1}{Z} \left[\vec{z}_0 \times \vec{E}_t \right] \quad (2.32)$$

kde Z je konštanta a \vec{z}_0 jednotkový vektor v smere šírenia sa elektromagnetickej vlny. Podľa teóremy ekvivalentnosti, ktorej dôsledkom je Huygensov princíp [11], možno dotyčnicové zložky intenzít elektrického a magnetického poľa \vec{E}_t a \vec{H}_t nahradiť ekvivalentnými hustotami povrchových prúdov \vec{j}_{SE} a \vec{j}_{SM} (obr.2.7)



Obr. 2.7. Zložky elektromagnetického poľa a ekvivalentné povrchové prúdy v elementárnej apertúre

Ak zvolíme súradnicovú sústavu podľa obr.2.7, platí

$$\vec{E}_t = -\vec{x}_0 E_x \quad (2.33)$$

$$\vec{H}_t = -\vec{y}_0 H_y \quad (2.34)$$

pričom podľa (2.32)

$$H_y = \frac{1}{Z} E_x \quad (2.35)$$

a pre ekvivalentné povrchové prúdy platí

$$\vec{j}_{SE} = \vec{x}_0 H_y = \vec{x}_0 \frac{E_x}{Z} dy \quad (2.36)$$

$$\vec{j}_{SM} = \vec{y}_0 E_x \quad (2.37)$$

kde \vec{x}_0 a \vec{y}_0 sú jednotkové vektory v smere x, resp. y. Ekvivalentný elektrický prúd potom možno vyjadriť vzťahom

$$I = j_{SE} dy = \frac{E}{Z} dy \quad (2.38)$$

a ekvivalentný magnetický prúd vzťahom

$$I_m = j_{SM} dx = E_x dx \quad (2.39)$$

Vzhľadom na to, že rozmery elementárnej apertúry sú malé v porovnaní s vlnovou dĺžkou, možno jej elektromagnetické pole považovať za superpozíciu elektromagnetického poľa elementárneho elektrického dipólu s dĺžkou $d_e = dx$ a elementárneho magnetického dipólu s dĺžkou $d_m = dy$, pričom pre ich dipólové momenty platia vzťahy

$$\vec{I} d_e = \vec{j}_{SE} dx dy = x_0 \frac{E_x}{Z} dS \quad (2.40)$$

a

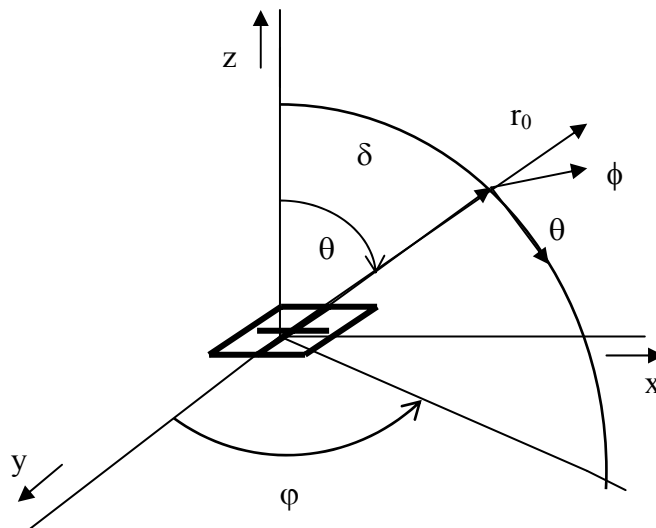
$$\vec{I} d_m = \vec{j}_{SM} dx dy = y_0 E_x dS \quad (2.41)$$

vypočítame elektrické pole elementárnej apertúry vo vzdialenej zóne. Ak zavedieme guľovú súradnicovú sústavu podľa obr.2.8, môžeme elektromagnetické pole vytvorené ekvivalentným elektrickým dipólom vypočítať ako superpozíciu polí od dvoch elektrických dipólov, z ktorých jeden leží v poludníkovej rovine ρ prechádzajúcej bodom pozorovania $P(r, \Theta, \Phi)$ a má dipólový moment

$$\vec{I} d'_e = \vec{r}_0 I d_e \cos \Phi \quad (2.42)$$

a druhý je na túto rovinu kolmý a má dipólový moment

$$\vec{I} d''_e = -\vec{\Phi}_0 I d_e \sin \Phi \quad (2.43)$$



Obr.2.8. Zavedenie guľovej súradnicovej sústavy pre elementárnu apertúru

kde \vec{r}_0 a $\vec{\Phi}_0$ sú jednotkové vektory v príslušných smeroch. Prvý elektrický elementárny dipól vytvára v bode P elektrickú zložku poľa, ktorá je rovnobežná s $\vec{\Phi}_0$. Podľa vzťahu (2.19) platí vzhľadom na zavedenie súradnicovej sústavy

$$E_{\Theta e} = -j \frac{k I d'_e}{4\pi} Z_0 \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \Theta = -j \frac{k E_x dS}{4\pi} \frac{Z_0}{Z} \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \Phi \cos \Theta \quad (2.44)$$

Pretože druhý elementárny elektrický dipól je kolmý na rovinu ρ , intenzita ním vytváraného elektrického poľa má smer $\vec{\Phi}_0$ a podľa (2.19) platí

$$E_{\Phi_e} = -j \frac{k I d_e''}{4\pi} Z_0 \frac{e^{-jkr}}{r} = -j \frac{k E_x dS}{4\pi} \frac{Z_0}{Z} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \Phi \quad (2.45)$$

Analogicky vypočítame zložky intenzity elektrického poľa ekvivalentného magnetického dipólu. Využitím vzťahu (2.27), upraveného pre vzdialenú zónu, dostaneme

$$E_{\Theta_m} = -j \frac{k E_x dS}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \Phi \quad (2.46)$$

$$E_{\Phi_m} = j \frac{k E_x dS}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \Phi \cos \Theta \quad (2.47)$$

Výsledný fázor vektora intenzity elektrického poľa v bode P je potom určený ako superpozícia jednotlivých zložiek

$$\vec{E} = \vec{\Theta}_0 E_{\Theta_e} + \vec{\Phi}_0 E_{\Phi_e} = \vec{\Theta}_0 (E_{\Theta_e} + E_{\Theta_m}) + \vec{\Phi}_0 (E_{\Phi_e} + E_{\Phi_m}) \quad (2.48)$$

Pre okamžité hodnoty fázorov E_{Θ} a E_{Φ} vyplývajú zo vzťahov (2.44) až (2.47) pre $Z=Z_0$ vzťahy

$$E_{\Theta}(t) = \frac{k E_{x0} dS}{4\pi r} \cos \Phi (1 + \cos \Theta) \sin(\omega t - kr + \xi) \quad (2.49)$$

$$E_{\Phi}(t) = -\frac{k E_{x0} dS}{4\pi r} \cos \Phi (1 + \cos \Theta) \sin(\omega t - kr + \xi) \quad (2.50)$$

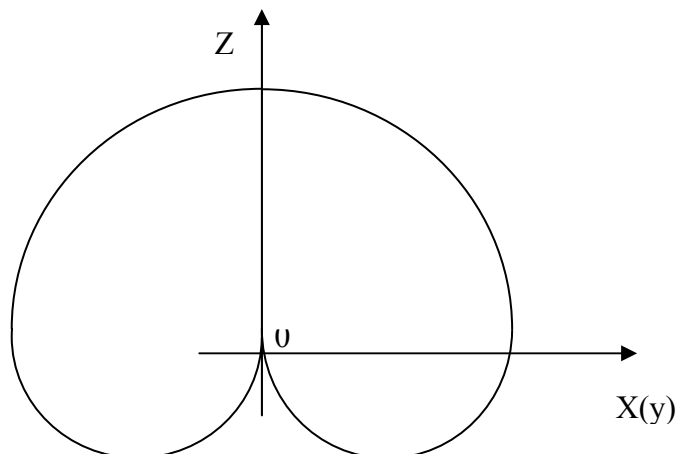
kde E_{x0} je amplitúda intenzity elektrického poľa v rovine elementárnej apertúry. Pre veľkosť intenzity výsledného elektrického poľa v bode P potom platí

$$E(t) = \sqrt{E_{\Theta}^2 + E_{\Phi}^2} = \frac{k E_{x0} dS}{4\pi r} (1 + \cos \Theta) \sin(\omega t - kr + \xi) \quad (2.51)$$

Zo vzťahu (2.51) vidíme, že smerová charakteristika elementárnej apertúry nezávisí od uhla Φ a je určená vzťahom

$$F(\Theta, \Phi) = 1 - \cos \Theta \quad (2.52)$$

ktorý predstavuje analytické vyjadrenie kardioidy v rovine $\Phi = \text{konšt.}$. Rez smerovou charakteristikou rovinou, ktorá obsahuje os z, je na obr.2.9. Smerovú charakteristiku v priestore získame rotáciou kardioidy okolo osi z.



2.9. Rez smerovou charakteristikou elementárnej apertúry

Keď analogickým spôsobom vypočítame vektor intenzity magnetického poľa zistíme, že medzi vektormi \vec{E} a \vec{H} platí vzťah

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_0} \left[\vec{r}_0 \times \vec{E} \right] \quad (2.53)$$

kde Z_0 je charakteristická impedancia prostredia.

Zo vzťahov (2.51) a (2.53) vyplýva, že elektromagnetické pole elementárnej apertúry má vo vzdialenej zóne podobný charakter ako elektromagnetické pole elementárnych dipólov. Toto pole je superpozíciou sekundárnych postupujúcich guľových vln, šíriacich sa do polpriestoru $z > 0$ od elementárnej apertúry v smere vektorov \vec{r}_0 rýchlosťou

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (2.54)$$

pričom jeho amplitúda klesá ako funkcia $1/r$.

2.3. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE SÚSTAVY ZDROJOV

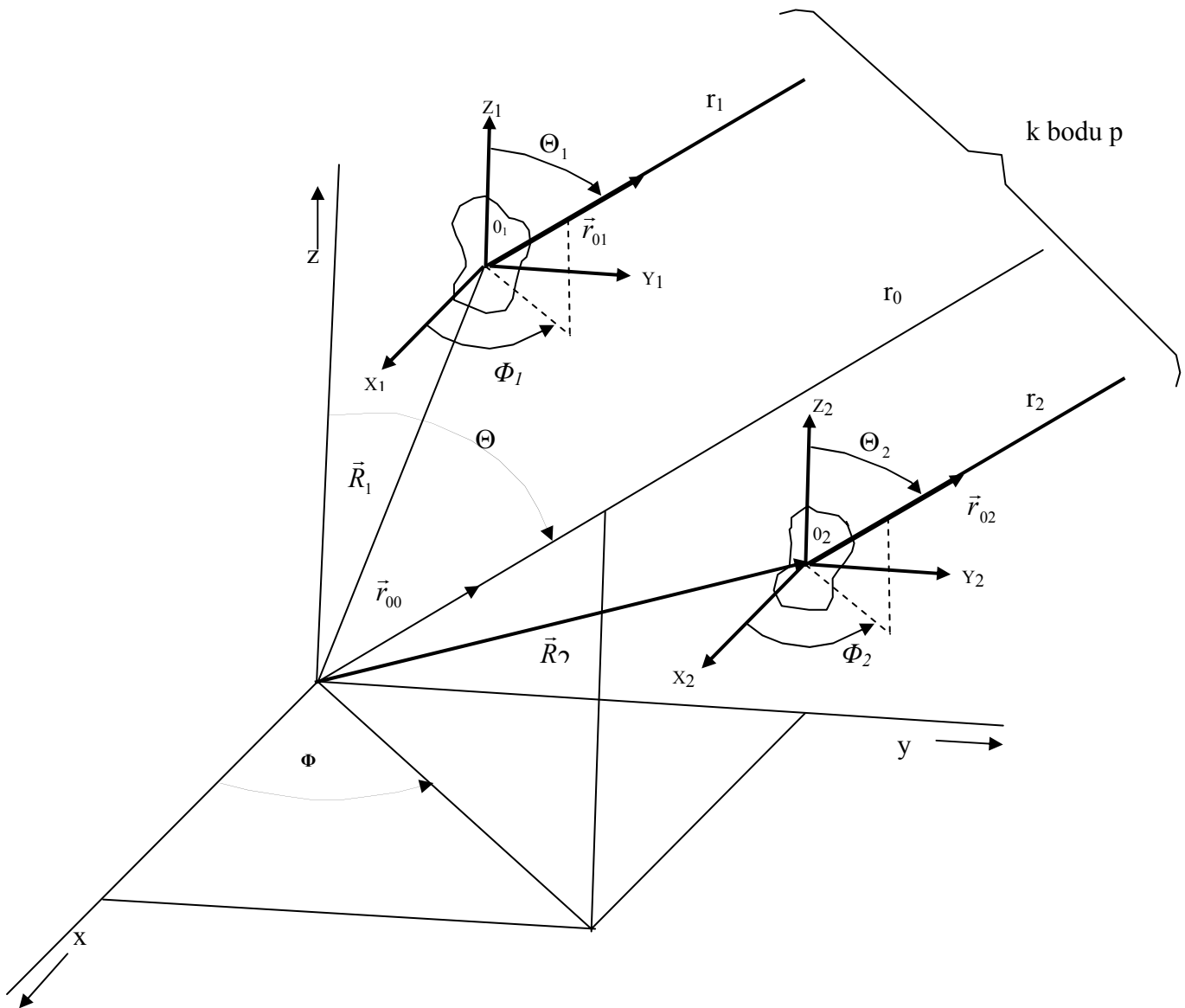
Ako vyplýva z kapitoly 2.2. elektromagnetické pole elementárnych zdrojov vo vzdialenej (žiarivej) zóne možno vo všeobecnosti popísať vzťahmi pre priečne zložky intenzity elektrického poľa E_Θ a E_Φ , pričom zložky intenzity magnetického poľa sú nimi jednoznačne určené. Tieto vzťahy majú všeobecný tvar

$$E_\Theta = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr}}{r} f_1(\Theta, \Phi) \quad (2.55)$$

$$E_\Phi = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr}}{r} f_2(\Theta, \Phi) \quad (2.56)$$

kde f_1 a f_2 sú smerové charakteristiky pre jednotlivé zložky elektrického poľa.

V prípade reálnych antén, ktoré môžeme chápať ako súbory elementárnych zdrojov, zostávajú vzťahy (2.55) a (2.56) v platnosti s tým, že smerové charakteristiky získame integrovaním nenormovaných smerových charakteristík elementárnych zdrojov.



Obr. 2.10. Sústava zdrojov

V mnohých prípadoch sa stretávame s úlohou určiť elektromagnetické pole sústavy zdrojov, pričom elektromagnetické pole jednotlivých zdrojov sústavy (napr. jednoduchých antén) už poznáme. V prípade, že tieto zdroje sú umiestnené v ohraničenej oblasti priestoru, možno riešenie tejto úlohy principiálne uskutočniť priamo využitím vzťahov (2.4) a (2.12). V mnohých prípadoch je však výhodnejšie využiť princíp superpozície a hľadať výsledné elektromagnetické pole ako súčet polí jednotlivých zdrojov sústavy.

Nech je daná sústava vytvorená z N zdrojov. Začiatok súradnicovej sústavy zvolíme v blízkosti týchto zdrojov. Každému zdroju (označenému indexom i) priradíme vlastnú súradnicovú sústavu so začiatkom O_i , ktorý leží v jeho okolí (obr. 2.10). Ak sa zaujímate o pole vo vzdialenej zóne, môžeme všetky polohové vektory \vec{r}_i bodu P považovať za rovnobežné a pole i -tého zdroja môžeme považovať za pole bodového zdroja umiestneného v bode O_i . Zložky elektrického poľa od i -tého zdroja možno vyjadriť vzťahmi

$$E_{\Theta i} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_i}}{r_i} f_{1i}(\Theta, \Phi) \quad (2.57)$$

$$E_{\Phi i} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_i}}{r_i} f_{2i}(\Theta, \Phi) \quad (2.58)$$

Výsledné pole sa získa ako súčet polí, pochádzajúcich od všetkých zdrojov, pričom musíme uvažovať rôzne fázy týchto polí, vyplývajúce z rozdielov vzdialenosti jednotlivých zdrojov od bodu P. Ak možno považovať jednotlivé polohové vektory za rovnobežné, platí

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 - \vec{R}_i \cdot \vec{r}_{00} \quad (2.59)$$

kde \vec{R}_i je polohový vektor začiatku súradnicovej sústavy i-tého zdroja O_i a \vec{r}_{00} je jednotkový vektor v smere polohového vektora bodu P v spoločnej súradnicovej sústave ($\vec{r}_0 = r_0 \vec{r}_{00}$).

Výsledné elektromagnetické pole možno popísať vzťahmi

$$E_{\Theta} = \sum_{i=1}^N E_{\Theta i} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} F_{S1}(\Theta, \Phi) \quad (2.60)$$

$$E_{\Phi} = \sum_{i=1}^N E_{\Phi i} = \frac{\omega\mu}{4\pi j} \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} F_{S2}(\Theta, \Phi) \quad (2.61)$$

kde

$$F_{S1}(\Theta, \Phi) = \sum_{i=1}^N f_{1i}(\Theta, \Phi) e^{jk \vec{R}_i \cdot \vec{r}_{00}} \quad (2.62)$$

$$F_{S2}(\Theta, \Phi) = \sum_{i=1}^N f_{2i}(\Theta, \Phi) e^{jk \vec{R}_i \cdot \vec{r}_{00}} \quad (2.63)$$

Moduly funkcií F_{S1} a F_{S2} predstavujú nenormované smerové charakteristiky sústavy.

Vzťahy (2.62) a (2.63) možno zjednodušiť v prípade, že všetky zdroje sústavy majú rovnaké normované smerové charakteristiky f_1 a f_2 . Potom

$$f_{1i}(\Theta, \Phi) = A_i f_1(\Theta, \Phi) \quad (2.64)$$

$$f_{2i}(\Theta, \Phi) = A_i f_2(\Theta, \Phi) \quad (2.65)$$

$$F_{S1} = f_1(\Theta, \Phi) \sum_{i=1}^N A_i e^{jk \vec{R}_i \cdot \vec{r}_{00}} \quad (2.66)$$

$$F_{S2} = f_2(\Theta, \Phi) \sum_{i=1}^N A_i e^{jk \vec{R}_i \cdot \vec{r}_{00}} \quad (2.67)$$

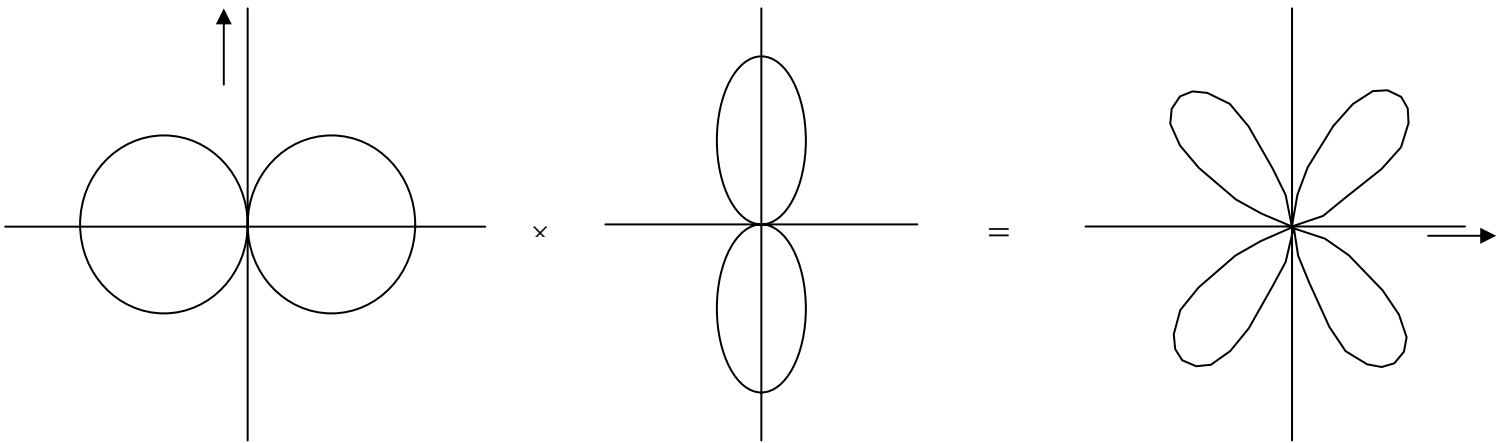
Výraz

$$F_2(\Theta, \Phi) = \sum_{i=1}^N A_i e^{jk \vec{R}_i \cdot \vec{r}_{00}} \quad (2.68)$$

nazývame interferenčným činiteľom (charakteristickou funkciou) sústavy zdrojov.

Interferenčný činiteľ je totožný so smerovou charakteristikou sústavy izotropných (všesmerových) žiaričov ($f(\Theta, \Phi) = 1$), ktoré sú umiestnené rovnako ako žiariče skúmanej sústavy.

Vzťahy (2.66) a (2.67) vyjadrujú tzv. pravidlo násobenia charakteristík, ktoré sa využíva pri výpočtoch smerových charakteristík anténových sústav, vytvorených z rovnakých a rovnako orientovaných žiaričov.



Obr. 2.11. Vytvorenie smerovej charakteristiky dvojice žiaričov s využitím pravidla násobenia charakteristík

2.4. VZŤAH MEDZI VYSIELACOU A PRIJÍMACOU ANTÉNOU

Teoréma vzájomnosti Rayleigha-Helmholtza zovšeobecnená Carsonom na prípad antén popisuje vzťah medzi parametrami antény používanej ako vysielača a ako prijímača. Vo všeobecnom prípade možno teorému vzájomnosti sformulovať nasledujúcim spôsobom. Nech sú dané dve rozloženia prúdov \vec{J}_1 a \vec{J}_2 v ohraničených oblastiach priestoru s objemami V_1 , resp. V_2 . V prípade, že prúdy \vec{J}_1 vytvárajú pole \vec{E}_1 a prúdy \vec{J}_2 pole \vec{E}_2 , medzi ich veľkosťami platí vzťah [1]

$$\int_{V_1} \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 dV = \int_{V_2} \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 dV \quad (2.69)$$

Po limitnom prechode k bodovým zdrojom s momentmi $\vec{s}_1 I_1 ds_1$ a $\vec{s}_2 I_2 ds_2$ dostávame vzťah

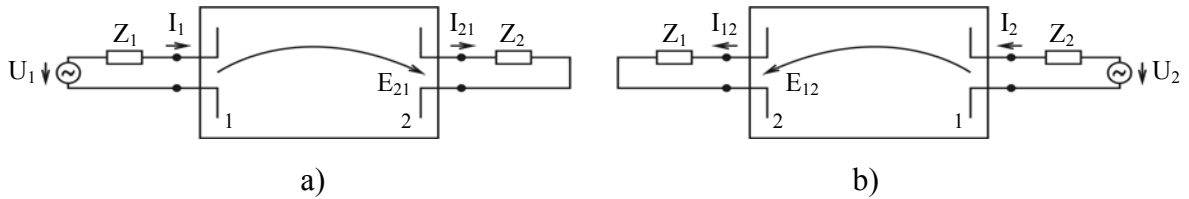
$$U_2 I_1 = U_1 I_2 \quad (2.70)$$

kde

$$U_1 = \vec{s}_2 \cdot \vec{E}_1 ds_2 \quad (2.71)$$

$$U_2 = \vec{s}_1 \cdot \vec{E}_2 ds_1 \quad (2.72)$$

a \vec{s}_1, \vec{s}_2 sú jednotkové vektory v smere prúdov \vec{J}_1 , resp. \vec{J}_2 . Vo všeobecnosti pri rovnakých prúdoch $I_1 = I_2$ je $U_1 = U_2$. Ak uvažujeme bodové žiariče, ktoré majú napájané svorky, môžeme teorému vzájomnosti interpretovať nasledujúcim spôsobom: Ak prúd I , tečúci svorkami antény 1, vytvorí na svorkách antény 2 napätie U (obr.2.12a), potom ten istý prúd I , tečúci svorkami antény 2, vytvorí na svorkách antény 1 rovnaké napätie U . To je najčastejšie používaná formulácia teorému vzájomnosti pre antény.



Obr. 2.12 Prenos z miesta antény 1 do miesta antény 2 (a) a naopak (b)

Teoréma vzájomnosti platí bez ohľadu na vzdialenosť medzi anténami, t.j. aj v blízkej zóne. Významným prínosom teóremy vzájomnosti je možnosť merania parametrov vysielačích antén pri ich použití ako antény prijímacie. Konkrétne pri zapojení podľa obr.2.12 pôsobením generátora s elektromotorickým napätím U_1 prechádza obvodom antény 1 prúd

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1 + Z_{V1}} \quad (2.73)$$

kde Z_{V1} je vstupná impedancia antény 1. Intenzita elektrického poľa vytvoreného týmto prúdom v mieste antény 2 je

$$E_{21} = B_1 I_1 f_1(\Theta, \Phi) \quad (2.74)$$

kde B_1 je konštanta úmernosti a $f_1(\Theta, \Phi)$ smerová charakteristika vysielačej antény. Zo vzťahov (2.73) a (2.74) vylúčime prúd I_1 a vyjadríme napätie U_1

$$U_1 = \frac{E_{21}(Z_1 + Z_{V1})}{B_1 f_1(\Theta, \Phi)} \quad (2.75)$$

Keď analogickým spôsobom vyjadríme U_2 a využijeme teóremu vzájomnosti (2.70), dostaneme po úprave vzťah

$$\frac{I_{12}(Z_1 + Z_{V1})}{E_{12} B_1 f_1(\Theta, \Phi)} = \frac{I_{21}(Z_2 + Z_{V2})}{E_{21} B_2 f_2(\Theta, \Phi)} = \frac{I(Z + Z_V)}{EBf(\Theta, \Phi)} = \text{konšt.} \quad (2.76)$$

kde I je prúd v prijímacej anténe, E intenzita elektrického poľa dopadajúcej vlny, Z_V vstupná impedancia antény použitej ako vysielačia, $f(\Theta, \Phi)$ smerová vysielačia charakteristika a Z vnútorná impedancia generátora.

2.5.VLNOVÁ A GEOMETRICKÁ OPTIKA

Nech je dané rozloženie intenzity elektrického a magnetického poľa na ploche S . Chceme určiť elektromagnetické pole v ľubovoľnom bode P . integrovaním Helmholtzovej rovnice dostaneme vzťahy[1]

$$\vec{E}(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (2.77)$$

$$\vec{H}(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\psi \frac{\partial \vec{H}}{\partial n} - \vec{H} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (2.78)$$

kde ∂/∂_n je derivácia podľa normály k ploche S. Rovnice (2.77) a (2.78) sa nazývajú vektorové Kirchoffove rovnice a možno ich považovať za analitickú formuláciu Huygensovho-Fresnelovho princípu, podľa ktorého každý bod vlnoplochy možno považovať za sekundárny zdroj elementárnej guľovej vlny. Z tohoto princípu vyplýva, že neexistuje bezprostredná súvislosť medzi elektromagnetickým poľom v bode P a poľom v jemu zodpovedajúcom bode vlnoplochy. Elektromagnetické pole v bode P je superpozíciou všetkých elementárnych vln z celej plochy S.

Huygensov-Fresnelov princíp predstavuje presné riešenie vlnovej rovnice. V mnohých prípadoch pri analýze a návrhu antén možno upustiť od tohoto presného riešenia a uspokojiť sa s približným riešením, ktoré získame metódami geometrickej optiky. Prechod od vlnovej optiky ku geometrickej optike možno uskutočniť nasledujúcou úvahou. Uvažujme dve vlnoplochy A a A_1 . Z Huygensovho-Fresnelovho princípu vyplýva, že pole v bode P_1 na ploche A_1 je superpozíciou elementárnych zdrojov rozložených spojite na ploche A. V protiklade s týmto princípom v geometrickej optike predpokladáme, že existuje jednoznačne súvislosť medzi poľom v bode P_1 a poľom v bode P na ploche A, ktorý mu zodpovedá, t.j. že existuje prosté zobrazenie plochy A na plochu A_1 . Zodpovedajúce si body P a P_1 pritom ležia na normále k oboj vlnoplochám. Obrazne povedané, elektromagnetické pole sa šíri pozdĺž trajektórií(lúčov), pričom pole na danej trajektórii nezávisí od polí na susedných trajektóriách.

Sformulujeme podmienky, pri ktorých sa elektromagnetické pole ľubovoľného systému zdrojov blíži poľu, ktoré sa riadi zákonmi geometrickej optiky. Pre elektromagnetické harmonické polia hľadáme riešenie Maxwellových rovníc v tvare

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jk_0 A} \quad (2.79)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-jk_0 A} \quad (2.80)$$

Dosadením vzťahov(2.79) a(2.80) do Maxwellových rovníc a vylúčením \vec{H}_0 dostaneme po úprave vzťah pre \vec{E}_0 v tvare

$$\vec{E}_0 = -\frac{1}{n^2} \left[\left(\vec{E}_0 \cdot \nabla A \right) \nabla A - (\nabla A)^2 \vec{E}_0 \right] + \frac{1}{jn^2 k_0} \left[\nabla \times \left(\nabla A \times \vec{E}_0 \right) + \left(\nabla A \times \nabla \times \vec{E}_0 \right) \right] + \frac{1}{n^2 k_0^2} \nabla \times \nabla \times \vec{E}_0 \quad (2.81)$$

Analogickú rovnicu možno odvodiť pre vektor \vec{H}_0 . Uvažujme teraz rovnicu (2.81) za predpokladu, že $\lambda \rightarrow 0$, t.j. $k_0 \rightarrow \infty$. Pretože veľkosť ∇A a derivácie \vec{E}_0 a \vec{H}_0 sú konečné, druhý a tretí člen na pravej strane rovnice (2.81) sa blíži k nule. Potom

$$\vec{E}_0 = -\frac{1}{n^2} \left[\left(\vec{E}_0 \cdot \nabla A \right) \nabla A - (\nabla A)^2 \vec{E}_0 \right] \quad (2.82)$$

Rovnica (2.82) a analogická rovnica pre \vec{H}_0 budú splnené, keď

$$\vec{E}_0 \cdot \nabla A = 0 \quad (2.83)$$

$$\vec{H}_0 \cdot \nabla A = 0 \quad (2.84)$$

$$(\nabla A)^2 = n^2 \quad (2.85)$$

kde n je index lomu.

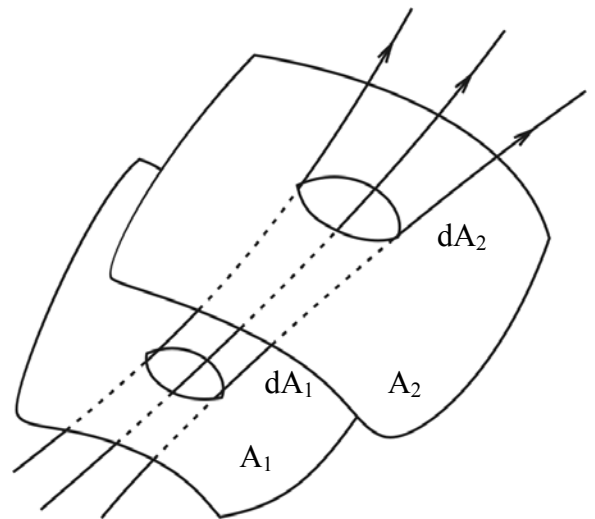
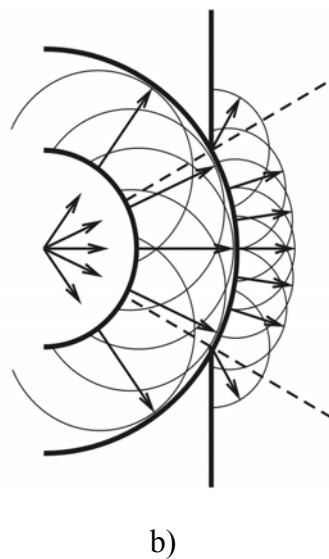
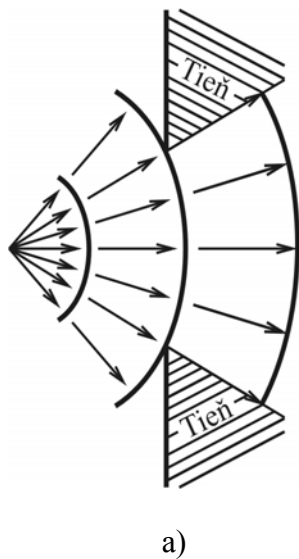
Diferenciálna rovnica (2.85) sa nazýva Rovnicou eikonálu a funkcia $A(r)$ -eikonál. Zo vzťahov (2.83) a (2.84) vyplýva, že vektory \vec{E}_0 a \vec{H}_0 sú kolmé na smer šírenia. Okrem toho možno ukázať, že vektory \vec{E}_0 a \vec{H}_0 sú navzájom kolmé a sú zviazané vzťahom

$$\vec{E}_0 = Z_0 \vec{H}_0 \quad (2.86)$$

kde Z_0 je charakteristická impedancia prostredia. Vlnové elektromagnetické pole v limitnom prípade $\lambda \rightarrow 0$ teda prechádza na pole, ktoré spĺňa podmienky geometrickej optiky. V týchto podmienkach každý element vlnoplochy sa chová ako element čela rovinnej elektromagnetickej vlny. Ak frekvencia zmien elektromagnetického poľa je konečná, ale dostatočne veľká, vzťahy geometrickej optiky budú splnené len pre tie body priestoru, pre ktoré je druhý a tretí člen na pravej strane rovnice (2.81) omnoho menší než prvý člen. Je

zrejmé, že táto podmienka nebude splnená tam, kde vektory \vec{E}_0 , \vec{H}_0 a funkcia A sa menia skokom. Skoková zmena amplitúd intenzít nastáva napr. na hranici tzv. geometrickeho tieňa. V týchto oblastiach sa elektromagnetické pole s konečnou frekvenciou bude veľmi líšiť od poľa spĺňajúceho podmienky geometrickej optiky a na analýzu týchto javov je nutné použiť vlnovú optiku.

Na obr.2.13 je porovnanie prechodu elektromagnetickej vlny otvorom v tienidle podľa geometrickej optiky(a) a skutočného výsledku, ktorý zodpovedá vlnovej optike(b).



Obr. 2.13. Prechod elektromagnetickej vlny otvorom v tienidle podľa geometrickej optiky (a) a podľa vlnovej optiky (b)

Obr. 2.14. Zväzok lúčov

Pre kvantitatívny popis vlastností elektromagnetického poľa v priblížení geometrickej optiky uvažujme dve vlnoplochy A_1 , A_2 a zväzok lúčov podľa obr.2.14, ktorý vytína na plochách A_1 a A_2 elementy dA_1 a dA_2 . Pretože energia sa šíri pozdĺž lúčov, platí rovnica kontinuity v tvare

$$S_1 dA_1 = S_2 dA_2 \quad (2.78)$$

kde S je hustota toku výkonu. Pre rovinnú elektromagnetickú vlnu platí

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \quad (2.88)$$

Keď uvažujeme, že $\mu = \text{konšt.}$ pozdĺž lúča, dostaneme zo vzťahov (2.87) a (2.88) vzťah medzi amplitúdou intenzity elektrického poľa na ploche A_1 a A_2 v tvare

$$\sqrt{\varepsilon_1} E_0^2(0) dA_1 = \sqrt{\varepsilon_2} E_0^2(s) dA_2 \quad (2.89)$$

kde s je vzdialenosť vlnoplôch A_1 a A_2 , $E_0(0)$ je amplitúda intenzity elektrického poľa na ploche A_2 . Ak zavedieme do vzťahu (2.89) index lomu $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$, dostaneme

$$n_1 E_0^2(0) dA_1 = n_2 E_0^2(s) dA_2 \quad (2.90)$$

V prípade, že prostredie je homogénne, lúče majú tvar priamok a medzi elementmi dA_1 a dA_2 platí vzťah

$$dA_2 = \left| \frac{(R_1 + s)(R_2 + s)}{R_1 R_2} \right| dA_1 \quad (2.91)$$

kde R_1 a R_2 sú hlavné polomery krivosti vlnoplochy A_1 , $(R_1 + s)$ a $(R_2 + s)$ sú hlavné polomery krivosti vlnoplochy A_2 . Po dosadení vzťahu (2.91) do (2.90) s uvážením, že $n_2 = n_1$, dostaneme vzťah

$$E_0(s) = E_0(0) \sqrt{\left| \frac{R_1 R_2}{(R_1 + s)(R_2 + s)} \right|} \quad (2.92)$$

Vzťah (2.92) vyjadruje pravidlo šírenia amplitúdy intenzity elektrického poľa pozdĺž lúča.

Pre $s \rightarrow \infty$ možno vzťah (2.92) nahradiť asymptotickým výrazom. Potom

$$E_0(s) \approx E_0(0) \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{s} \quad (2.93)$$

Amplitúda intenzity elektrického poľa klesá nepriamo úmerne so vzdialenosťou. To je charakteristická vlastnosť gul'ovej vlny.

Ak predpokladáme, že plocha A_1 je povrch valca, potom jeden z hlavných polomerov krivosti (napr. R_1) je nekonečne veľký. Pre $s \rightarrow \infty$ dostaneme

$$E_0(s) \approx E_0 \frac{\sqrt{R_1}}{s} \quad (2.94)$$

Amplitúda intenzity elektrického poľa klesá ako funkcia $s^{-1/2}$, čo je charakteristická vlastnosť valcovej plochy.

Ak sú obidva polomery krivosti nekonečne veľké, t.j. plocha A_1 je rovinná, platí

$$E_0(s) \approx E_0(0) \quad (2.95)$$

Amplitúda intenzity elektrického poľa sa nemení so vzdialenosťou, čo je charakteristické pre rovinnú vlnu.